



TITLE:

周波数領域における多変数制御系の  
設計法に関する研究(  
Dissertation\_全文)

AUTHOR(S):

山本, 幸一郎

---

CITATION:

山本, 幸一郎. 周波数領域における多変数制御系の設計法に関する研究.  
京都大学, 1984, 工学博士

ISSUE DATE:

1984-03-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.r5238>

RIGHT:

周波数領域における多変数制御系  
の設計法に関する研究

昭和 58 年 10 月

山 本 幸 一 郎

周波数領域における多変数制御系  
の設計法に関する研究

昭和58年10月

山本 幸一郎

DOC

1983

24

電気系

# 目 次

<b>第 1 章 序論</b>	<b>1</b>
1. 1 多変数制御系の設計手法について	1
1. 2 直列補償要法が多変数系への拡張の試み	3
1. 3 INA法とその問題点	5
1. 4 INA法についての従来の研究と第2章の内容	8
1. 5 多変数サンプル値への拡張と第3章の内容	10

<b>第2章 連続時間系についての 基礎理論と設計法</b>	<b>13</b>
2. 1 基本定理と一般化ゲルシュゴリン帯	13
2. 2 一般化ゲルシュゴリン擬似帯	17
2. 3 Mp修正一般化ゲルシュゴリン帯	18
2. 4 干渉指数の意味	21
2. 5 開ループ系と閉ループ制御系の干渉指数の関係	23
2. 6 フィードフォワード補償について	25
2. 7 直列補償法	30
1 制御系の構成	30
2 設計手順	31
3 近似対角化の指針	32
2. 8 フィードフォワード補償法	33
2. 9 制御系への適用例	34
1 ガスタービンの制御系	34
2 ボイラの制御系	38

<b>第3章 多変数多周期サンプル値系 についての基礎理論</b>	<b>45</b>
3. 1 多変数多周期サンプル値制御系の説明と記号	45



3. 2	離散時間実現と安定条件	49
1	離散時間信号	49
2	開ループ系の離散時間実現	50
3	閉ループ系の離散時間実現と安定条件	53
3. 3	多変数多周期インパルス変調	59
1	分解表現ベクトル	59
2	伝達関数の多周期インパルス変調	60
3	多周期インパルス変調による多変数系の記述	63
4	多周期インパルス変調の性質	64
5	多周期インパルス変調を用いた安定条件	66
3. 4	対称座標表現と一般化ゲルシュゴリン帯	68
1	対称座標分解表現ベクトル	68
2	対称座標多周期インパルス変調と安定条件	69
3	対称座標多周期インパルス変調の性質	71
4	M行列による安定条件	74
5	多周期一般化ゲルシュゴリン帯と安定条件	76

第4章	結論	83
-----	----	----

謝辞	86
----	----

参考文献	87
------	----

# 第 1 章

## 序 論

### 1. 1 多変数制御系の設計手法について

閉ループ制御系の設計法は、周波数応答法と状態空間法の二つに大別できる。一変数制御系に対する周波数応答法は、1950年頃までに確立された。この設計手法の特徴として、

- 1) ベクトル線図、ボード線図、ニコルス線図等を用いる図式的手法である
- 2) 簡単な補償要素からはじめて、次第に複雑な補償要素を構成する逐次的手法である
- 3) 設計の各段階で設計者の判断が介入し、試行錯誤により設計が進められる
- 4) 出力フィードバックを用いる

などが挙げられる。各種の図を利用して設計を行なうことは、制御系に要求される諸特性（定常特性、過渡特性、制御対象の特性変動に対する不感性感、外乱に対する不感性感等）を全般にわたって直感的に把握しやすいという利点を伴う。また、設計の各段階で設計者が介入することにより、制御対象に関する設計者の経験的知識が生かされるという利点が生じる。しかし、多変数制御系においては入出力が相互に干渉するため一変数制御系に対する周波数応答法をそのまま適用することは困難であると考えられていた。

1950年代後半から制御理論に状態空間の概念が導入され、状態空間法と呼ばれる設計手法が開発されてきた。<sup>1), 2)</sup> 状態空間法の特徴としては、

- 1) 制御系に要求される仕様条件は、一つの評価基準（二次形式の評価基準、極の配置等）で表わされる
- 2) 評価基準が与えられれば、それに対する制御則は体系的に求められる
- 3) 一変数制御系、多変数制御系の区別なく適用できる

#### 4) オブザーバで状態を推定し、状態フィードバックを用いる

などが挙げられる。状態空間法では、オブザーバを必要とするため補償要素は複雑なものとなるが、一般には周波数応答法に比べてより厳しい要求を満たすことが可能であるといわれている。しかし、たとえば代表的な状態空間法である最適レギュレータを例にとってみれば、

1) 制御系に要求される特性にはさまざまなものがあり、これらの要求を一つの評価基準で表現するのは困難である。したがって、与えられた評価基準の意味で最適な制御則が得られたとしてもそれが総合的な意味で最適であるとは必ずしも言えない

2) 最適レギュレータの補償要素を実際に実現しようとする位相進みを非常に大きくする必要があり、検出器のノイズを増幅する結果となって実用にならない<sup>†)</sup>

3) 安全性が保証されない<sup>†)</sup>

4) 制御対象のパラメータの不確かさが考慮されていない

などの問題点があることが指摘された。<sup>3), 4)</sup>このような状況を背景として周波数応答法による設計手法が見直され、1960年代末からいくつかの多変数制御系に対する設計手法が提案されてきた。このような設計法としてRosenbrockによって提案されたINA法(逆ナイキスト配列法)<sup>5), 6)</sup>、Mayneによって提案されたSRD法(逐次還送差法)<sup>7), 8)</sup>、MacFarlaneによって提案された特性軌跡法などがある。<sup>9), 10)</sup>これらの設計法はいずれも相互干渉の問題を何らかの方法で解決し、一変数系の設計問題に帰着させようとするものである。このうちINA法は相互干渉の影響を定量的に評価している点に特色があり、実用上有望な設計法と言える。本論文は、INA法とSRD法の考え方を基本とし、その欠点を取り除いた新しい設計法を提案するものである。次節ではまずシステムの構成に立ち入った少し詳しい議論を行ない、それをもとに3、4、5節で従来の研究と本論文の寄与するところを明らかにしたい。

---

†) その後の研究により、オブザーバの設計を工夫することによって通常の意味の安定度余裕を十分大きく保ったまま、最適レギュレータの能力を十分発揮させることがわかっている。<sup>11)</sup>しかし、その場合でも検出器ノイズの増幅や制御量以外の変量が大きくなりすぎる可能性などがあって実用上必ずしも問題が解決されたとは言えない。また、安全性まで保証することは最適レギュレータでは難しい。

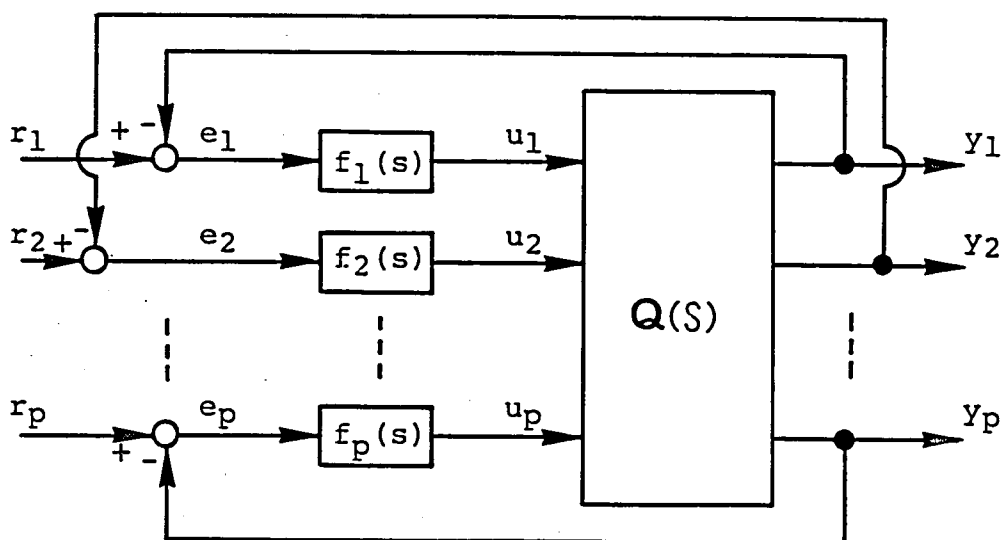
## 1. 2 直列補償法の変数系への拡張 の試み

まず、操作量と制御量の個数の等しい制御対象を考える。それぞれの操作量と制御量に適切な対応をつけ、一つの操作量で対応する一つの制御量を制御するという考えの下に図.

1に示した閉ループ制御系を構成する。 $\underline{r}$ 、 $\underline{e}$ 、 $\underline{u}$ 、 $\underline{y}$  はそれぞれ目標値、誤差、操作量、制御量を表わす  $p$  次ベクトルである。 $Q(s) = (q_{ij}(s))$  は  $p$  入力  $p$  出力の制御対象の伝達関数行列で  $p$  次正方行列である。 $f_1(s), f_2(s), \dots, f_p(s)$  は各ループの制御器の伝達関数である。 $F(s) = \text{diag} (f_1(s), f_2(s), \dots, f_p(s))$  とおく。図. 1の制御系において、 $\underline{u}$  から  $\underline{y}$  への伝達関数行列  $H(s) = (h_{ij}(s))$  は、

$$H(s) = [I + Q(s)F(s)]^{-1} Q(s) \quad (1)$$

と表わされる。ここで、一変数系の直列補償法を用いて各ループの制御器  $f_i(s)$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) を設計することを考えよう。 $i$  番目のループの制御器  $f_i(s)$  を設計するためには、 $i$  以外のループを制御器  $f_j(s)$  ( $j=1, 2, \dots, p; j \neq i$ ) で閉じたときの  $i$  番



$$\underline{r} = [r_1, r_2, \dots, r_p]$$

$$\underline{e} = [e_1, e_2, \dots, e_p]$$

$$\underline{u} = [u_1, u_2, \dots, u_p]$$

$$\underline{y} = [y_1, y_2, \dots, y_p]$$

図. 1 多変数閉ループ制御系

目の操作量  $u_i(t)$  から  $i$  番目の制御量  $y_i(t)$  への伝達関数を知る必要がある。この伝達関数を  $h_i(s|F)$  と書く。

$h_i(s|F)$  は (1) 式の  $F(s)$  に

$$F_i(s) = \text{diag}(f_1(s), \dots, f_{i-1}(s), 0, f_{i+1}(s), \dots, f_p(s)) \quad (2)$$

を代入して得られる  $H(s)$  の要素  $h_{ii}(s)$  に等しい。これを具体的に与えておくと、

$$h_i(s|F) = g_{ii}(s) + \eta_i(s|F) \quad (3)$$

$$\eta_i(s|F) = -\underline{b}_i^T(s) F(s|\bar{I}) [I + Q(s|\bar{I}) F(s|\bar{I})]^{-1} \underline{a}_i(s) \quad (4)$$

となる。ここで  $Q(s|\bar{I})$ ,  $F(s|\bar{I})$  はそれぞれ  $Q(s)$ ,  $F(s)$  の第  $i$  行、第  $i$  列を取り除いて得られる  $(p-1)$  次正方行列、 $\underline{a}_i(s)$ ,  $\underline{b}_i^T(s)$  はそれぞれ  $Q(s)$  の第  $i$  列および第  $i$  行から要素  $q_{ii}(s)$  を除いて得られる  $(p-1)$  次ベクトルである。すなわち、

$$\underline{a}_i(s) = (q_{1,i}(s), \dots, q_{i-1,i}(s), q_{i+1,i}(s), \dots, q_{p,i}(s))^T \quad (5)$$

$$\underline{b}_i^T(s) = (q_{i,1}(s), \dots, q_{i,i-1}(s), q_{i,i+1}(s), \dots, q_{i,p}(s)) \quad (6)$$

これより明らかに  $Q(s)$  が対角行列であれば

$$h_i(s|F) = g_{ii}(s) \quad (7)$$

となるが、 $Q(s)$  が対角行列でない一般の場合には  $h_i(s|F)$  は  $f_j(s)$  ( $j=1, 2, \dots, p; j \neq i$ ) に依存した量である。以上より、 $f_i(s)$  を決定するためには他のループの制御器  $f_j(s)$  ( $j=1, 2, \dots, p; j \neq i$ ) が既に決定されていなければならないということになる。しかし、他のループについても事情は同じであり  $f_j(s)$  ( $j \neq i$ ) を決定するためには  $f_i(s)$  が既に決定されていなければならない。ここに設計問題は堂々巡りに陥る。この堂々巡りを避けるため INA 法、SRD 法、特性軌跡法などいくつかの設計法が考えられてきた。

<sup>7), 8)</sup>  
SRD 法では、はじめにループをすべて開いたときの  $u_1(t)$  から  $y_1(t)$  への伝達関数 (すなわち  $g_{11}(s)$ ) に対し変数系の直列補償法を適用して制御器  $f_1(s)$  を設計する。次に、 $f_1(s)$  で第一ループを閉じたときの  $u_2(t)$  から  $y_2(t)$  への伝達関数を求めこれに直列補償法を適用して  $f_2(s)$  を設計する。以下同様に第  $p$  ループまでの制御器を設計する。このとき、各段階で単一ループが安定であるように各制御器を選べば閉ループ系全体の安定性が保証できる。SRD 法は、相互干渉が大きな制御系にも適用可能である。しかし、相互干渉が大きい場合には新しいループを閉じることによって既に設計済みのループが影響を受け、期待した制御特性が得られなくなる可能性がある。また、特定のループが切断された場合を除いて安全性が保証されない。

<sup>9), 10)</sup>

次に、特性軌跡法を概観しておこう。簡単のため  $\omega$  に対して  $Q(j\omega)$  の固有値  $g_1(j\omega)$ ,

$g_2(j\omega), \dots, g_p(j\omega)$  がすべて異なるとしよう。このときある行列  $W(j\omega)$  が存在して  $Q(j\omega)$  は

$$Q(j\omega) = W(j\omega) \tilde{Q}(j\omega) W^{-1}(j\omega) \quad (8)$$

$$\tilde{Q}(j\omega) = \text{diag}(g_1(j\omega), g_2(j\omega), \dots, g_p(j\omega)) \quad (9)$$

と対角化できる。 $\tilde{Q}(j\omega)$  は対角行列であるから、相互干渉のない独立した  $p$  個の一変数系と考えられる。 $g_1(j\omega), g_2(j\omega), \dots, g_p(j\omega)$  のベクトル軌跡（特性軌跡と呼ぶ）を使って制御器の設計を進める方法が特性軌跡法である。この手法の欠点は  $W(j\omega)$  という周波数に依存する行列を変換行列に用いているため、実際の入出力関係と特性軌跡の対応が必ずしも明らかでないという点に要約される。

以上のSRD法、特性軌跡法では、ループ間の相互干渉を定量的におさえることはなく、安定性を保証するような制御器の求め方に重点がおかれている。これに対し、INA法は相互干渉の定量的評価を出発点とした設計法であり、相互干渉に対する対策において積極的な工夫がみられる。INA法については、次節で詳しく述べる。

### 1.3 INA法とその問題点

はじめに、INA法について概観する。<sup>5), 6)</sup> もし、(3) 式の  $h_i(s|F)$  が他のループの制御器  $f_j(s)$  ( $j=1, 2, \dots, p; j \neq i$ ) に依存しない量で評価できれば、 $i$  番目のループの制御器  $f_i(s)$  を他のループと独立に設計することが可能となる。これに関して Rosenbrock は次の結果を得た。まず、 $p$  次正方行列  $Z = (z_{ij})$  に対して

$$|z_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^p |z_{ij}| \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (10)$$

が成り立つとき、 $Z$  は対角行優勢であると言う。同様に

$$|z_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^p |z_{ji}| \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (11)$$

が成り立つとき、 $Z$  は対角列優勢であると言う。 $Z$  が対角行優勢か対角列優勢のいずれかのとき、 $Z$  は対角優勢であると言う。 $\hat{Q}(s) = (\hat{q}_{ij}(s)) = \hat{Q}^{-1}(s)$ ,  $\hat{H}(s) = (\hat{h}_{ij}(s)) = \hat{H}^{-1}(s)$  とおく。 $\hat{H}(s)$  は (1) 式より

$$\hat{H}(s) = F(s) + \hat{Q}(s) \quad (12)$$

となる。このとき、次の定理が成り立つ。

定理. 1 もし、 $\hat{H}(s)$  が対角行優勢であれば

$$|h_i^{-1}(s|F) - \hat{q}_{ii}(s)| < a_i(s) \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (13)$$

が成立する。ただし、 $a_i(s)$  は

$$a_i(s) = \sum_{j=1, j \neq i}^p |\hat{q}_{ij}(s)| \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (14)$$

で与えられるものとする。

定理. 2 もし、 $\hat{H}(s)$  が対角列優勢であれば

$$|h_i^{-1}(s|F) - \hat{q}_{ii}(s)| < a_i(s) \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (15)$$

が成立する。ただし、 $a_i(s)$  は

$$a_i(s) = \sum_{j=1, j \neq i}^p |\hat{q}_{ji}(s)| \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (16)$$

で与えられるものとする。

定理. 3  $Q(s)$  の不安定極の数を  $\pi$  個とする。C をナイキストの路とする。 $\hat{q}_{ii}(s)$ ,  $\hat{h}_{ii}(s)$  による C の像をそれぞれ  $\Gamma_{q_i}$ ,  $\Gamma_{h_i}$  とし、これらが原点を時計方向にそれぞれ  $\pi_{q_i}$ ,  $\pi_{h_i}$  回まわるものとする。このとき次の三つの条件が成立すれば図. 1 の閉ループ系は漸近安定である。

- i)  $\hat{Q}(s)$  が C 上で対角優勢である
- ii)  $\hat{H}(s)$  が C 上で対角優勢である
- iii)  $\sum_{i=1}^p (\pi_{q_i} - \pi_{h_i}) = \pi$ . (17)

簡単のため、 $f_i(s)$  をゲインとする ( $i = 1, 2, \dots, p$ )。このとき、対角優勢条件は図式的に次のように簡単に調べることができる。複素平面上で中心が  $\hat{q}_{ii}(s)$ 、半径が  $a_i(s)$  の円板  $\delta_i(s)$  を考える。このとき、 $\delta_i(s)$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) が原点を中に含まなければ、 $\hat{Q}(s)$  は対角優勢である。また、 $\delta_i(s)$  が点  $-f_i + j0$  を含まなければ  $\hat{H}(s)$  は対角優勢である。 $\omega$  を  $-\infty$  から  $+\infty$  まで動かしたときの  $\delta_i(j\omega)$  の軌跡  $D_i$  を  $i$  番目のゲルシュゴリン帯と呼ぶ。定理. 1、定理. 2 によれば、すべての制御器  $f_j$  をゲルシュゴリン帯  $D_j$  が点  $-f_j + j0$  を中に含まないように選ぶことにすれば、 $h_i(s|F)$  の逆ベクトル軌跡 (逆ナイキスト軌跡) は  $i$  番目のゲルシュゴリン帯  $D_i$  の中に含まれる。しかも、定理. 3 によりゲルシュゴリン帯  $D_i$  が点  $-f_i + j0$  を中に含まないことが安定であるための十分条件となっている。したがって、ゲルシュゴリン帯を幅のある逆ベクトル

軌跡と考えると安定性を考慮した制御器の設計が可能となる。以上が、INA法の主要部である。INA法では $\hat{Q}(s)$ が対角優勢であることが前提となっている。このため、制御対象の逆伝達関数行列 $\hat{G}(s) = \tilde{G}^{-1}(s)$ が対角優勢でない場合には、はじめに非対角行列の補償要素（近似対角化補償要素と呼ぼう） $K(s)$ を用いて $\hat{Q}(s) = [\tilde{G}(s) K(s)]^{-1}$ が対角優勢となるように補償しておく必要がある。この補償は近似的な非干渉系を実現するためにも必要である。Rosenbrockはこのような近似対角化補償要素の設計法として、

- a)  $G(0)$  が正則な場合  $K(s)$  として  $G^{-1}(0)$  を用いる
- b) ユニモジュラ行列を組み合わせで試行錯誤により  $K(s)$  を設計する

二つの方法を提案した。Rosenbrockの原提案は概略以上の通りである。Rosenbrockの提案したこの設計法は実用上有効な設計法であると評価され、実用目的にも使われた。しかし、Rosenbrockの研究ではいくつかの不十分な点が残されている。その主なものを次に挙げよう。

1) 一般に、伝達関数行列の要素には物理的に単位の異ったものが混在している場合が多い。したがって、それらの和や大きさを比較することにもとづく対角優勢という概念は物理的意味がはっきりしない。このため、たとえば入出力の単位の変換により対角優勢条件が変わることになる。また、 $\hat{Q}(s)$ が対角列優勢の場合は、制御器 $F(s)$ をつけることにより対角列優勢がくずれる場合がある。

2) ゲルシュゴリン帯の幅の大きさが一般にはループ毎に異り、ループ間のバランスがとれない。

3) 近似対角化補償要素  $K(s)$  の設計法としてRosenbrockは前述の a)、b) 二つの方法を提案している。しかし、a) の方法では  $s = 0$  とその近くの低周波では対角優勢が実現できるが、他の周波数帯では対角優勢になるとは限らない、b) の方法は体系的でなくかなりの洞察力が要求される、などの問題がある。したがって、近似対角化補償要素の設計手法としてはRosenbrockの提案した方法だけでは不十分であるといえる。

4) 理論に忠実であろうとすれば、実際の制御系で必要のないと思われる高周波数帯まで $\hat{Q}(s)$ を対角優勢にしなければならない。

5) ボード線図、ニコルス線図、逆ニコルス線図などを利用して制御器の設計を行なう場合の具体的な設計手法が十分でない。

6) 近似対角化補償を行ったときには、それぞれのループの安定度余裕を大きくとっても、制御系全体の安定度余裕が小さくなる場合がある。INA法では、この点についての



配慮がなされていない。

7) 入力と出力の個数が一致しない場合には適用できない。

## 1. 4 I N A法についての従来の研究と 第2章の内容

Rosenbrockの提案した設計法は、前節で述べたような欠点を含んでいた。その後、当然それらの問題点を解決するための研究がなされてきた。本節では、はじめにRosenbrock以後のそれらの研究を前節で指摘した問題点と関連づけながら概観する。

前節で指摘した 問題点1)、2)に関連した研究としてAraki-Nwokah 12) ,Nwokah 13)の研究がある。これは、対角優勢条件のかわりにM行列条件を用いて  $h_i(s|F)$  を評価したもので、Rosenbrockの結果の一般化になっている。彼らの評価方法は、 $Q(s)$ の対角要素による正規化を行っているため、入出力の単位の変換に対し不変なものとなっている。また、各ループの  $h_i(s|F)$  が一様な相対誤差で評価されるため、ループ間のバランスがとれたものになっている。したがって、彼らの評価法を用いれば、前節で挙げた1)、2)の問題点を解決することができるはずである。

開ループ系の相互干渉の大きさを表わすために、朴他 14)は(14)式の  $u_i(j\omega)$ と  $\hat{Q}(j\omega)$ の対角要素  $\hat{q}_{ii}(j\omega)$ の比を用いることを提案したが、これはベクトル量であり制御操作と関連した直感的な解釈とは必ずしも結びつかない。また、Gray-Taylor 15) 、Taylor- Hayton 16)は干渉ベクトルと呼ばれる量を導入した。これもベクトル量であるが、制御操作と関連した解釈が可能である。

問題点3)の近似対角化補償要素の設計法に関しては、いろいろな設計手法が提案されている。これらの方法は、図式的な方法と評価関数を設定し自動的に計算する方法の二つに大別される。図式的な方法としては、朴他 14)やSchafer 他 17)によって提案された方法がある。自動的に計算する方法としては、Hawkins 18) 、19)、Mason-Daly 20)やLeininger 21)によって提案された方法がある。これらの方法は、開ループ系の伝達関数行列  $Q(s)$ あるいは逆伝達関数行列  $\hat{Q}(s)$ を近似的に非干渉化する方法である。ところで、実際の制御系では開ループ系の相互干渉が問題となる。しかし、開ループ系と閉ループ系の相互干渉の関係が明らかでないため近似対角化補償要素によってあらかじめ開ループ系

の相互干渉をどの程度減らしておけばよいのか、その指針が与えられていないという問題が残されている。

問題点4) は、設計に逆伝達関数行列  $\hat{Q}(s)$  を用いたことに起因する。普通の伝達関数行列を用いても I NA 法と同様の設計法を構成することができ、この場合は  $Q(s)$  を高い周波数まで対角優勢にしなくても安定性を保証することができる。

問題点5) で述べた具体的な設計手法については、朴他 14) と Leininger 22) の研究がある。朴他は、逆ニコルス線図上でのゲイン、位相補償要素の設計法を示した。

Leininger は、ゲルシュゴリン帯をボード線図、ニコルス線図に写像して設計に利用することを提案した。

前節で指摘した問題点6) の安定度余裕については、Postlethwaite 他 23) や Doyle-Stein 24) の研究がある。これらの研究では安定であるための十分条件をあつかうにとどまっている。安定度余裕が小さくなる場合の対策については、まだ研究されていない。

問題点7) の入力と出力の個数が異なる制御対象に対しては I NA 法だけでなく、SRD 法や特性軌跡法なども適用できない。このような場合、入力あるいは出力の適当な一次結合を作り、入力と出力の個数を一致させることなどが示唆されているが、この方面の体系的な研究はまだ行われていない。

なお、先に指摘したような問題点があるにもかかわらず、I NA 法の実用性は早くから注目され、実システムに対する多くの適用例 [ McMorran 26) 、Munro 27) 、Hugh-Mallouppa 28) 、Munro 他 29) 、Ashon-Nicholson 30) 、Spang 31) 、高橋 32) 、Whalley 他 33) 、Munro-Engell 34) ] が報告されている。

本論文2章では以上の研究をふまえ、前節で指摘した Rosenbrock の提案の含んでいた欠点、特に 1) 、2) 、4) 、5) を解決した直列補償法を提案する。さらに、ここで提案する直列補償法とともに用いられるのに適したフィードフォワード補償法についても述べる。また、ここで提案した設計法を実際の制御系に適用した例も示す。

2章1節から5節では、ここで新たに提案する直列補償法の基礎となる事項について論<sup>101), 102), 103)</sup>じる。1節では、本設計法の基礎である Araki-Nwokah によって与えられた一般化ゲルシュ<sup>12), 13)</sup>ゴリン帯の理論について述べる。2、3節では、一般化ゲルシュゴリン帯の性質について<sup>104)</sup>述べる。本設計法では、相互干渉の大きさを表わす指標として一般化ゲルシュゴリン帯の幅と密接な関係のある干渉指数とよばれるスカラ量を用いる。干渉指数は荒木 35) によって導入された。4節では、干渉指数の物理的な意味について述べる。5節では、干渉指

数を用いて開ループ系と閉ループ系の相互干渉の大きさの関係を数値的に明らかにする。<sup>105)</sup>  
 6節では、本文で提案するフィードフォワード補償法の基礎について述べる。<sup>106), 107)</sup> 7節では、  
 1節から5節の結果をもとにAraki-Nwokahの定理に基づく一般化ゲルシュゴリン帯を用い<sup>101)-103), 108)</sup>  
 た直列補償法を提案する。この設計法はINA法で用いられるゲルシュゴリン帯のかわり  
 にそれを一般化した一般化ゲルシュゴリン帯を用いるものである。これによって、普通の  
 伝達関数行列を用いても技術的な困難なしに設計を進めることができ、前節で指摘した問  
 題点1)、2)、4)を取り除くことができる。また、ニコルス線図を用いた具体的な設  
 計手法についても述べる。さらに、開ループ系と閉ループ系の相互干渉の大きさの関係が  
 干渉指数によって明らかにされているため、ループを閉じたときの相互干渉の大きさを予  
 測しながら開ループ系の近似対角化補償要素の設計を行うことができるという利点がある。  
 8節では、6節の結果をもとに直列補償された制御系に対するフィードフォワード補償法<sup>106), 107)</sup>  
 を提案する。9節では、はじめにガスタービンの制御系の設計にここで提案した直列補償<sup>101)-103), 109)</sup>  
 法を適用する。次に発電用ボイラの制御系の設計に直列補償法<sup>110)</sup>とフィードフォワード補償<sup>106), 107)</sup>  
 法を適用した例を示す。

## 1. 5 多変数サンプル値への拡張と第3章の内容

最近のマイクロ・コンピュータの発達に伴い、計算機制御が一般的になりつつある。計  
 算機を制御装置として使用する場合、制御系をサンプル値系としてあつかわなければなら  
 ない。ここでは、多変数系の分散型計算機制御を想定し、連続系のINA法や一般化ゲル<sup>5), 6)</sup>  
 シュゴリン帯法<sup>12), 13)</sup>を多変数サンプル値制御系に拡張することを考えよう。

計算機制御を行う場合にはサンプリング周期の選定が問題となる。サンプリング周期の  
 選定に関しては、サンプリング周期と制御性能との関連を考察したTerao<sup>36)</sup>、Levis 他<sup>37)</sup>  
 、毛利他<sup>38)</sup>などの研究がある。また、経験的データからたとえば流量制御であれば1秒、  
 温度や成分制御であれば20秒といったサンプリング周期の目安が示されている。<sup>39)</sup> 多変数  
 系の制御量は一般に物理的に異ったものが混在している場合が多く、要求される制御性能  
 も各ループごとに異っていることが多いと考えられる。このような制御対象に対して分散  
 型のデジタルコントローラを設計する場合、それぞれのコントローラのサンプリング周

期を最も短かいものに合わせることも考えられるが、制御量の種類、制御系に要求される特性（立ち上がり時間や整定時間など）、検出器の周波数特性、外乱の性質などに応じてコントローラごとにサンプリング周期を設定することができれば演算速度、データ・ロギングなどの面でより経済的な制御系が構成できると考えられる。

各ループのサンプリング周期が等しい通常の変数サンプリング系の入出力の伝達特性はパルス伝達関数行列によって表現できる。パルス伝達関数行列に対しては、INA法や本論文2章で述べる一般化ゲルシュゴリン帯の理論がそのまま適用できる。このようなサンプリング系にINA法を適用して制御系を設計した報告もある [Ibrahim-Munro 40)、Papaioannou-Hughes 41)]。しかし、異ったサンプリング周期をもつ変数系の入出力の伝達特性は通常のパルス伝達関数行列で表現することはできず、INA法や一般化ゲルシュゴリン帯の理論をそのまま適用することはできない。

異ったサンプリング周期をもつディジタルコントローラを含んだサンプリング系（多周期サンプリング系）に関しては、周波数応答を用いたKranc 42)、43)、Andeen 44)、Coffey-Williams 45)、Jury 46)、Boykin-Frayer 47)、48)、Flowers-Hammond 49)、Kan-Aggarwal 50)、Kuo-Yeh 51)、状態変数を用いたKalman-Bertran 52)、Friedland 53)、Meyer-Burrus 54)、55)、Stanford 56)、Lu-Gupta 57)などの研究がある。これらの研究の主な目的は、多周期サンプリング系の解析手法を確立し制御系設計のための理論的基礎を与えることにある。この結果、安定性についてのいくつかの基本的な結果が得られている。しかし、これらの研究で用いられている解析手法は複雑で制御系の入出力特性や制御器が制御系に与える影響を直感的に把握することが困難である。このことは、ミサイルなどの比較的正確なモデルが得られる飛翔体の制御問題から多周期サンプリング系の研究がはじめられたことに一因があるように思われる。このように正確なモデルが得られる制御対象に対しては、計算機を用いた厳密な計算が可能でありこれを基に制御器を設計することができる。しかし、一般の工業用のプラントの場合は制御対象の正確なモデルを得ることは一般にむづかしく、また得られたとしても非常に大きなものとなり理論的な設計法を適用することが困難である。このような場合には（もちろん、計算機は制御系の解析や設計のために不可欠な道具ではあるが）、特に制御系の設計に当って設計者の経験的知識や直感が必要とされるであろう。本論文3章の目的は、直感的に把握しやすい変数多周期サンプリング系の表現方法を導き、連続系の一般化ゲルシュゴリン帯の理論を拡張して変数多周期サンプリング制御系の設計のための基礎理論を与えることにある。

3章の内容は次の通りである。1節では、本文であつかう多変数多周期サンプル値系の説明を行なう。2節では、サンプル値だけに着目した離散時間実現を導き、これを基に多変数多周期サンプル値系の安定条件を導く。<sup>111)-113)</sup>3節では、サンプル値信号の分解表現ベクトルを導入し多周期インパルス変調を定義する。<sup>111),112),114)</sup>多周期インパルス変調は、多変数多周期サンプル値系の入出力関係を与える行列である。4節では、対称座標変換を用いて対称座標多周期インパルス変調を定義する。<sup>111),112),115)</sup>対称座標多周期インパルス変調は、普通の変数サンプル値系のパルス伝達関数行列を多変数多周期サンプル値系に拡張したものとなっており、入出力特性を直感的に理解することができる。さらに、対称座標多周期インパルス変調に対して連続な多変数系の一般化ゲルシュゴリン帯の理論を拡張して、一般化ゲルシュゴリン帯を用いた安定条件を導く。<sup>111)-113)</sup>この一般化ゲルシュゴリン帯を用いれば連続系と同様に周波数応答に着目した多変数多周期サンプル値制御系の設計を行うことができる。

なお、式、図、定理等の番号は各章ごとに付けた。他の章で引用する場合は、式、図、定理等の番号の前に引用した章の番号を付けて表わした。

## 第 2 章

### 連続時間系についての基礎理論と設計法

#### 2. 1 基本定理と一般化ゲルシュゴリン帯

ここでは、Araki-Nwokahによって与えられた定理に基づく一般化ゲルシュゴリン帯の理論について述べる。図1. 1の閉ループ制御系を考える。(1. 3)式で与えられる  $h_i(s|F)$  の評価に関してAraki-Nwokahは次の定理を得た。

<sup>12)</sup>  
定理. 1 行列  $B(s) = (b_{ij}(s))$  を

$$\begin{cases} b_{ii}(s) = 0 & i = 1, 2, \dots, p \\ b_{ij}(s) = |g_{ij}(s)| & i, j = 1, 2, \dots, p ; i \neq j \end{cases} \quad (1)$$

で定義される  $p$  次正方行列とする。 $A(s) = \text{diag} (a_1(s), a_2(s), \dots, a_p(s))$  を  $A(s) - B(s)$  が半M行列となるように選ぶ。このとき

$$|f_j^{-1}(s) + g_{jj}(s)| > a_j(s) \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (2)$$

が満たされていれば

$$|h_i(s|F) - g_{ii}(s)| \begin{cases} < a_i(s) & (a_i(s) \neq 0) \\ = 0 & (a_i(s) = 0) \end{cases} \quad (3)$$

が成り立つ。ただし、(2)式は  $f_j(s) = 0$  のときにも満たされているものとみなす。 ■  
行列Aのとり方には、いろいろな方法がある。次の二つが代表的である。

---

十) 非対角要素がすべて非正で、主座小行列式がすべて正(非負)である行列をM行列(半M行列)という。M行列、半M行列については文献58)、59)、60) 参照。

補題. 1<sup>†)</sup> 行列  $C(s|Q) = (c_{ij}(s))$  を

$$\begin{cases} c_{ii}(s) = 0 & i = 1, 2, \dots, p \\ c_{ij}(s) = |g_{ij}(s)| / |g_{jj}(s)| & i, j = 1, 2, \dots, p; i \neq j \end{cases} \quad (4)$$

で定義される  $p$  次正方行列とし、 $\lambda(s|Q)$  を  $C(s|Q)$  の最大固有値とする。このとき

$$\alpha_i(s) = \lambda(s|Q) |g_{ii}(s)| \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (5)$$

とすれば、 $A(s) - B(s)$  は半M行列となる。

補題. 2  $\alpha_i(s)$  を

$$\alpha_i(s) = \sum_{j=1, j \neq i}^p |g_{ij}(s)| \quad (\text{行和}) \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (6)$$

とすれば、 $A(s) - B(s)$  は半M行列となる。

補題. 3  $\alpha_i(s)$  を

$$\alpha_i(s) = \sum_{j=1, j \neq i}^p |g_{ji}(s)| \quad (\text{列和}) \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (7)$$

とすれば、 $A(s) - B(s)$  は半M行列となる。

Rosenbrockが得た  $h_i(s|F)$  の評価法 (定理1. 1、定理1. 2) は、補題2、補題3のAを用いたものである。定理. 1はRosenbrockの結果を一般化したものとなっている。本論文で提案する制御器  $f_i(s)$  の設計法では  $h_i(s|F)$  の評価に、補題. 1で与えられるAを用いる。補題. 1のAを使えば定理. 1は次のように言いかえられる。

系. 1  $i$  番目以外のループに対して

$$|1 + g_{jj}(s) f_j(s)| > \lambda(s|Q) |g_{jj}(s) f_j(s)| \quad \begin{matrix} j = 1, 2, \dots, p \\ j \neq i \end{matrix} \quad (8)$$

が満たされれば

$$|h_i(s|F) f_i(s) - g_{ii}(s) f_i(s)| \begin{cases} < \lambda(s|Q) |g_{ii}(s) f_i(s)| \\ & (\lambda(s|Q) \neq 0) \\ = 0 & (\lambda(s|Q) = 0) \end{cases} \quad (9)$$

が成立する。

(4) 式で定義される行列  $C(s|Q)$  を、伝達関数行列  $Q(s)$  の干渉行列、その最大固有

†) この補題では、行列Bの分解可能性を考慮していない。Bが分解可能であれば、制御系をいくつかの独立した系に分けてあつかうことができる。Bが分解可能な場合については文献12) 参照。本論文ではBが分解不可能であると仮定する。

値  $\lambda(s|Q)$  を干渉指数と呼ぼう。干渉指数は、操作量と制御量の単位の変換に対して不変である。実際、 $D$  を非負の要素をもった  $p$  次対角行列とする。このとき、(4) 式より、 $Q(s)$ ,  $Q(s)D$ ,  $DQ(s)$  の干渉行列  $C(s|Q)$ ,  $C(s|QD)$ ,  $C(s|DQ)$  の間には

$$C(s|QD) = C(s|Q) \quad (10)$$

$$C(s|DQ) = D C(s|Q) D^{-1} \quad (11)$$

の関係がある。 $Q(s)$ ,  $Q(s)D$ ,  $DQ(s)$  の干渉指数はそれぞれ  $C(s|Q)$ ,  $C(s|QD)$ ,  $C(s|DQ)$  の最大固有値であるから

$$\lambda(s|QD) = \lambda(s|DQ) = \lambda(s|Q) \quad (12)$$

を得る。<sup>(1)</sup> このことは、操作量と制御量の単位の変換をしても干渉指数が不変であることを意味している。<sup>†)</sup>

系. 1 の図式的意味について述べる。 $s = j\omega$  として、複素平面上で

$$\text{中心: } g_{ii}(j\omega) f_i(j\omega)$$

$$\text{半径: } \lambda(j\omega|Q) |g_{ii}(j\omega) f_i(j\omega)|$$

の円板  $\delta_i(j\omega)$  を考える ( $i = 1, 2, \dots, p$ )。  $\omega$  を  $-\infty$  から  $+\infty$  まで変えたときの円板  $\delta_i(j\omega)$  の軌跡を  $D_i$  とする。円板  $\delta_i(j\omega)$  を  $i$  番目の一般化ゲルシュゴリン円板、 $D_i$  を  $i$  番目の一般化ゲルシュゴリン帯と呼ぼう。(8) 式は  $D_j$  が点  $-1 + j0$  を含まないことと等価である ( $j = 1, 2, \dots, p; j \neq i$ )。(9) 式は、 $h_i(s|F) f_i(s)$  のベクトル軌跡が  $D_i$  の内部に含まれることを意味している。

系. 1 は一つのループの  $h_i(s|F)$  の評価を与える形で述べられているが、すべてのループに対して同時に評価を与えることができる。すなわち、すべての  $f_j(s)$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ) を (8) 式を満たすように選ぶものとすれば、(9) 式はすべての  $h_i(s|F)$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) に対して成立する。定理. 1 についても同様である。したがって、すべての一般化ゲルシュゴリン帯  $D_j$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ) が点  $-1 + j0$  を含まなければ、 $h_i(s|F) f_i(s)$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) のベクトル軌跡は  $i$  番目の一般化ゲルシュゴリン帯  $D_i$  の内部に含まれることになる。

次に、一般化ゲルシュゴリン帯を用いた図 1. 1 の閉ループ系の安定条件について述べる。Araki-Nwokah によって与えられた  $M$  行列条件を用いた安定条件より、次の安定定理が得られる。

---

†)  $Q(s)D$  は操作量の単位の変換、 $DQ(s)$  は制御量の単位の変換に対応している。



**定理. 2**  $Q(s)$  の不安定極の個数を  $\pi_0$  とし、 $g_{ii}(s) f_i(s)$  のナイキスト軌跡が点  $-1 + j0$  を時計方向に回る回数を  $\pi_i$  とする ( $i=1, 2, \dots, p$ )。このとき、次の二つの条件 a)、b) が満たされれば、図 1. 1 の閉ループ系は漸近安定である。

- a)  $\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_p = -\pi_0$ . (13)
- b) すべての一般化ゲルシュゴリン帯  $D_i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) が点  $-1 + j0$  を含まない。



$Q(s)$  が安定である場合は、定理. 2 の特別な場合として次の定理が得られる。

**定理. 3**  $Q(s)$  が不安定極をもたないとする。このとき、すべての一般化ゲルシュゴリン帯  $D_i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) が点  $-1 + j0$  のまわりを回ることなく、かつ含むこともなければ、図 1. 1 の閉ループ系は漸近安定である。



さて、各ループの制御器  $f_i(s)$  を設計するためには  $h_i(s|F) f_i(s)$  のベクトル軌跡を知ることが必要である。ところで、系. 1 により、すべての一般化ゲルシュゴリン帯が点  $-1 + j0$  を中に含まなければ、各ループの  $h_i(s|F) f_i(s)$  のベクトル軌跡はそれぞれの一般化ゲルシュゴリン帯  $D_i$  の内部に含まれる。さらに、 $Q(s)$  が安定な場合は、定理. 3 によりすべてのループの一般化ゲルシュゴリン帯が点  $-1 + j0$  を含まずかつ一回も回らないことが閉ループ系が安定であるための十分条件となっている ( $Q(s)$  が不安定極をもつ場合は定理. 2 より一般化ゲルシュゴリン帯が点  $-1 + j0$  を回る回数を数えることにより安定判別が可能である)。したがって、一般化ゲルシュゴリン帯を幅のあるベクトル軌跡と考え、これをもとに制御器  $f_i(s)$  を他のループと独立に設計することができる。

**注. 1** 一般化ゲルシュゴリン帯という用語は、Rosenbrock の用語 (ゲルシュゴリン帯) の拡張である。ゲルシュゴリン帯は補題. 2、補題. 3 によって与えられる  $Q_i(s)$  をもとに作られる円板の軌跡である。一般化ゲルシュゴリン帯とは、定理. 1 に基づいて作られる円板の軌跡であり、行列  $A$  の選び方に依拠していろいろな一般化ゲルシュゴリン帯が考えられる。したがって、本節で一般化ゲルシュゴリン帯と呼んだ帯は正確には 干渉指数  $\lambda(s|Q)$  を用いた一般化ゲルシュゴリン帯 と呼ぶべきものである。ただし、以下ではこれ以外の一般化ゲルシュゴリン帯を用いることがないので干渉指数  $\lambda(s|Q)$  を用いた一般化ゲルシュゴリン帯を単に一般化ゲルシュゴリン帯と呼ぶことにする。

## 2. 2 一般化ゲルシュゴリン擬似帯<sup>104)</sup>

直列補償法による制御器の設計では、ボード線図、ゲイン位相線図、ニコルス線図などを利用する。そこで、本節では一般化ゲルシュゴリン帯をゲイン位相線図上に写像したときの像について考察しておく。i 番目の一般化ゲルシュゴリン円板  $\delta_i(j\omega)$  の周は、

$$Z = g_{ii}(j\omega) f_i(j\omega) (1 + \lambda(j\omega|Q) e^{j\theta}) \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (14)$$

で表わされる。したがって、ゲイン位相線図上の縦座標 (ゲインの dB 値) を  $\zeta$ 、横座標 (位相角) を  $\xi$  とすれば、 $\delta_i(j\omega)$  のゲイン位相線図上の像  $\delta'_i(j\omega)$  は、

$$\zeta = 20 \log |Z| = 20 \log |g_{ii}(j\omega) f_i(j\omega)| + 20 \log |1 + \lambda(j\omega|Q) e^{j\theta}| \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (15)$$

$$\xi = \arg[Z] = \arg[g_{ii}(j\omega) f_i(j\omega)] + \arg[1 + \lambda(j\omega|Q) e^{j\theta}] \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (16)$$

で表わされる。すなわち、 $\delta'_i(j\omega)$  は

$$\zeta = 20 \log |1 + \lambda(j\omega|Q) e^{j\theta}| \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (17)$$

$$\xi = \arg[1 + \lambda(j\omega|Q) e^{j\theta}] \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (18)$$

で与えられる図形を  $(20 \log |g_{ii}(j\omega) f_i(j\omega)|, \arg[g_{ii}(j\omega) f_i(j\omega)])$  だけ平行移動して得られる。(17)、(18) 式は  $Q(s)$  の干渉指数  $\lambda(s|Q)$  だけで決まる。

(17)、(18) 式で表わされる図形は、 $\lambda(j\omega|Q) < 1$  のとき楕円様の図形、 $\lambda(j\omega|Q) \geq 1$  のときは上に凸な閉曲線となる。この図形を一般化ゲルシュゴリン擬似円板と呼ぼう。一般化ゲルシュゴリン擬似帯円板を、図. 1 に示した。一般化ゲルシュゴリン帯  $D_i$  のゲイン位相線図上の像  $D'_i$  は  $\delta'_i(j\omega)$  の  $\omega = -\infty \sim +\infty$  に対する軌跡である。この軌跡を一般化ゲルシュゴリン擬似帯と呼ぼう。(17)、(18) 式はループの番号  $i$  に関係しないから、同一周波数では各ループの一般化ゲルシュゴリン擬似円板の大きさは等しい。また、制御器  $f_i(s)$  を変えたとき、一般化ゲルシュゴリン擬似帯  $D'_i$  はその基準線

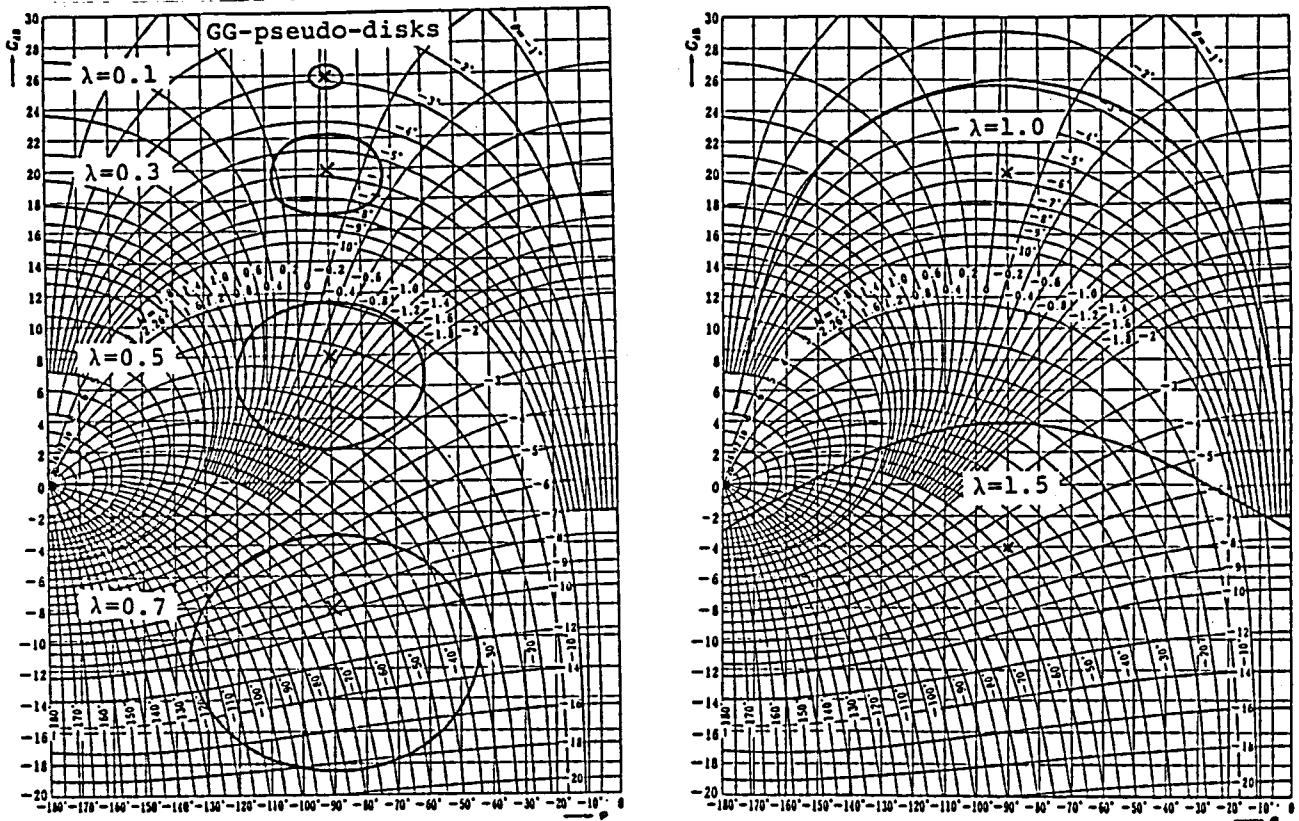
$$\zeta = 20 \log |g_{ii}(j\omega) f_i(j\omega)| \quad (19)$$

$$\xi = \arg[g_{ii}(j\omega) f_i(j\omega)] \quad (20)$$

のみが変り、その上に重ねられる一般化ゲルシュゴリン擬似円板は不変に保たれる。

定理. 3 の安定条件は、次のように言い換えられる。

定理. 4  $Q(s)$ が安定であるとする。このとき、ゲイン位相線図上の点(0 dB、 $-180^\circ$ )が一般化ゲルシュゴリン擬似帯の左上方にあれば、図1. 1の閉ループ系は安定である。



a)  $\lambda < 1$

b)  $\lambda \geq 1$

図. 1 一般化ゲルシュゴリン擬似円板の形状

## 2. 3 Mp 修正一般化ゲルシュゴリン帯<sup>104)</sup>

一般化ゲルシュゴリン帯を用いて制御器  $f_i(s)$  を設計する場合、一般化ゲルシュゴリン帯の幅が狭いほど、制御器のパラメータ設定を正確に行なうことができる。ところで、<sup>†)</sup>周波数応答法による一入力一出力制御系の設計では、たとえば  $M_p = 1.3$  となるように制御器のゲインを調整するのであって安定限界までゲインを大きくすることはしない。一般化ゲルシュゴリン帯を用いて制御器を設計する場合も同様であり、第一回目の設計にお

†)  $M_p$  は閉ループの共振値である。

いては一般化ゲルシュゴリン帯が点  $-1 + j0$  に接するほど、制御器のゲインを大きくすることはない（一般化ゲルシュゴリン帯が点  $-1 + j0$  を含まないという条件は、閉ループ系が安定であるための十分条件である）。このことは、制御器  $f_j(s)$  ( $j=1, 2, \dots, p$ ) が (8) 式より強い制限を満たすことを意味する。この場合、 $h_i(s|F) f_i(s)$  の評価を (9) 式よりさらに正確に行なうことが可能である。これに関して、次の補題が成立する。

58)  
補題. 4  $B = (b_{ij})$  を対角要素が 0 の非負の要素をもつ  $p$  次正方行列、 $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_p)$ 、 $A' = \text{diag}(a'_1, a'_2, \dots, a'_p)$  を非負の要素をもつ  $p$  次対角行列とする。このとき、 $A$  と  $A'$  に

$$a'_i a'_j \geq a_i a_j \quad i, j = 1, 2, \dots, p; \quad i \neq j \quad (21)$$

が成立し、 $A - B$  が半 M 行列であれば、 $A' - B$  は半 M 行列である。 ■

この補題を使えば、 $A - B$  が半 M 行列となる  $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_p)$  に対して

$$\begin{cases} a'_j = \alpha a_j \\ a'_i = \frac{1}{\alpha} a_i \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, p; \quad j \neq i \quad (22)$$

$$\alpha \geq 1 \quad (23)$$

で定義される  $A' = \text{diag}(a'_1, a'_2, \dots, a'_p)$  によっても、 $A - B$  は半 M 行列となる。この結果を系. 1 に適用すれば、次の系が得られる。

系. 2 伝達関数行列  $Q(s)$  の干渉指数を  $\lambda(s|Q)$  とし  $\alpha \geq 1$  とする。このとき、 $i$  番目以外のループに対して

$$|1 + g_{ji}(s) f_j(s)| > \alpha \lambda(s|Q) |g_{ji}(s) f_j(s)| \quad \begin{matrix} j=1, 2, \dots, p \\ j \neq i \end{matrix} \quad (24)$$

が満たされれば、

$$|h_i(s|F) f_i(s) - g_{ii}(s) f_i(s)| \begin{cases} < \frac{1}{\alpha} \lambda(s|Q) |g_{ii}(s) f_i(s)| \\ & (\lambda(s|Q) \neq 0) \\ = 0 & (\lambda(s|Q) = 0) \end{cases} \quad (25)$$

が成立する。 ■

ここで、

$$\text{中心: } g_{ii}(s) f_i(s)$$

$$\text{半径: } \frac{1}{\alpha} \lambda(s|Q) |g_{ii}(s) f_i(s)|$$

の円板  $\delta_{i,\alpha}(s)$  を考えよう。系. 2 は  $i$  以外のループに対し (24) 式が成立するように  $f_j(s)$  を選ぶことにすれば、 $h_i(s|F) f_i(s)$  が  $\delta_{i,\alpha}(s)$  の中に含まれることを意味

している。

さて、先に述べたように制御器  $f_i(s)$  の設計を行なう場合は一般化ゲルシュゴリン帯と点  $-1 + j0$  の間をあけておくのが普通である。そこで、 $i$  以外の制御器  $f_j(s)$  を  $\delta_{j,\alpha}(s)$  が複素平面上の閉ループゲイン  $=M$  に対応する円 ( $M$  円) の外部にあるように選んだとき、第  $i$  ループの  $h_i(s|F) f_i(s)$  の存在範囲が丁度  $\delta_{i,\alpha}(s)$  になっているような  $\alpha$  を求めよう。 $M > 1$  のとき  $M$  円の中心は  $0 - j \frac{M^2}{M^2-1}$ 、半径  $r_0$  は  $\frac{M}{M^2-1}$  である。 $\alpha_0$  と  $\lambda(s|Q)$  を固定する。 $\delta_{j,\alpha_0}(s)$  ( $j=1, 2, \dots, p; j \neq i$ ) が  $M$  円の外部にあるものとする。このとき、 $\delta_{j,\alpha_0}(s)$  の中心は図. 2 に示した境界  $C_{\alpha_0}$  の外側の領域  $R_{\alpha_0}$  内になければならない。 $C_{\alpha_0} = \{(x, y)\}$  は、

$$g_{jj}(s) f_j(s) = x + jy \quad (26)$$

と表わしたとき

$$x = l \cos \theta - \frac{M^2}{M^2-1} \quad (27)$$

$$y = l \sin \theta \quad (28)$$

$$l = r_0 + \frac{1}{\alpha_0} \lambda(s|Q) \sqrt{x^2 + y^2} \quad (29)$$

で与えられる。

$$\alpha' = \min_{R_{\alpha_0}} \frac{\sqrt{(1+x)^2 + y^2}}{\lambda(s|Q) \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (30)$$

とすれば、 $i$  以外のループに対して

$$|1 + g_{jj}(s) f_j(s)| > \alpha' \lambda(s|Q) |g_{jj}(s) f_j(s)| \quad (31)$$

が成立するから、系. 2 より  $h_i(s|F) f_i(s)$  は  $\delta_{i,\alpha'}(s)$  の中に存在することになる。

(30) 式右辺の最小値は  $C_{\alpha_0}$  上で与えられることが容易に示せる。 $\alpha_0$  を動かして  $\alpha' = \alpha_0$  となる  $\alpha_0$  を求めれば、これが求める  $\alpha$  である。ここでは、一つのループを固定しているが、この方法で得られる  $\alpha$  を用いてすべてのループの  $h_i(s|F) f_i(s)$  の評価を行なうことができる。すなわち、すべてのループに対して  $\delta_{j,\alpha}(s)$  が  $M$  円の外側にあるように制御器  $f_j(s)$  を選ぶことにすれば、すべてのループの  $h_i(s|F) f_i(s)$  は  $\delta_{i,\alpha}(s)$  の内部に含まれることになる。この  $\delta_{i,\alpha}(s)$  を  $i$  番目の  $Mp$  修正一般化ゲルシュゴリン帯円板、 $\omega = -\infty \sim +\infty$  に対する  $\delta_{i,\alpha}(j\omega)$  の軌跡を  $Mp$  修正一般化ゲルシュゴリン帯と呼ぶ。 $M=1.3$  (2.26 dB) の場合に求めた  $\lambda(s|Q)/\alpha$  の値を表. 1 に示した。また、 $Mp=1.3$  のときの  $\delta_{i,\alpha}(s)$  のゲイン位相線図上の像を図. 3 に示した。

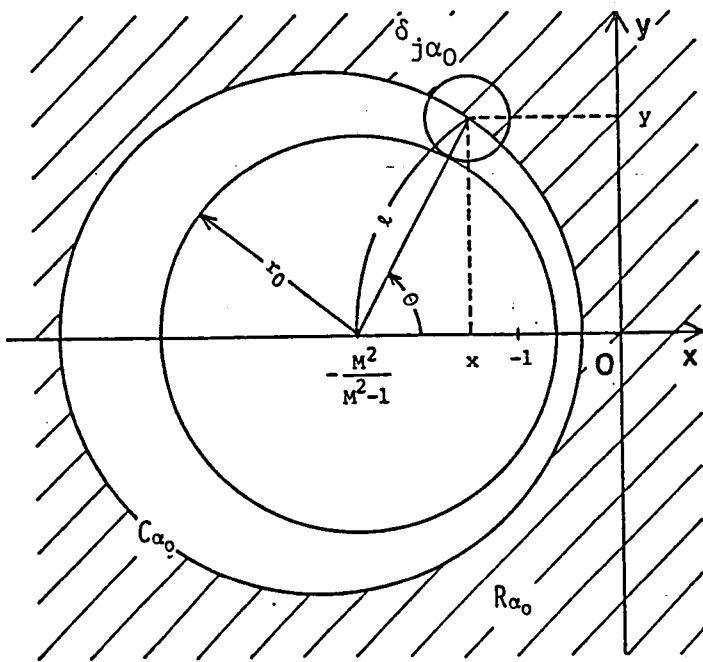


図. 2  $\delta_{j\alpha_0}$ とM円の関係

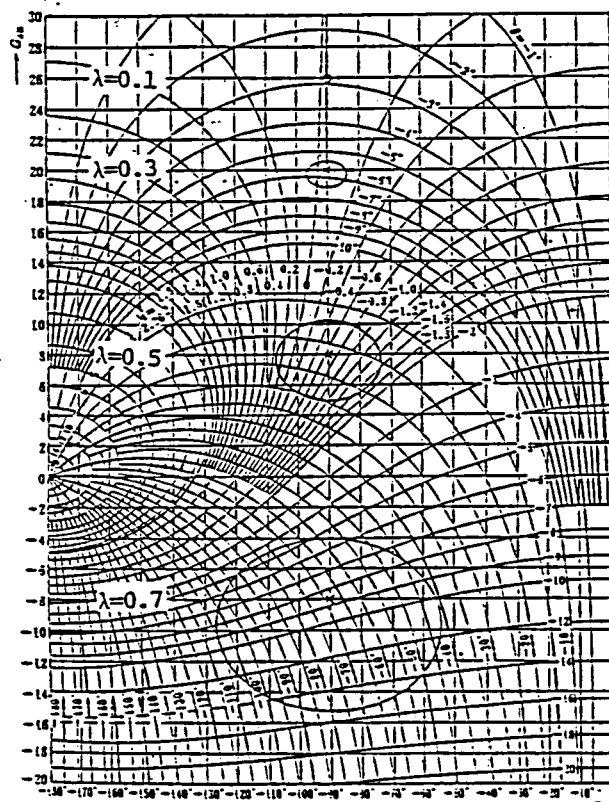


図. 3 Mp修正一般化ゲルシュゴリン帯の  
ゲイン位相線図上の像 (M=1.3)

$\lambda(s Q)$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\lambda(s Q)/\alpha$	0.018	0.063	0.121	0.197	0.299	0.417	0.548	0.690	0.841	1.0

表. 1 Mp修正一般化ゲルシュゴリン円板の大きさ

## 2. 4 干渉指数の意味<sup>35)</sup>

本節では、干渉指数の物理的意味について述べる。図. 4に示した開ループ制御系を考える。 $Q(s) = (q_{ij}(s))$ とする。ここで一つの操作量  $u_i$  に対応する一つの制御量  $y_i$  を動かす場合を考える。 $y_i(s)$  は、

$$y_i(s) = q_{ii}(s) u_i(s) + \sum_{j=1, j \neq i}^P q_{ij}(s) u_j(s) \quad (32)$$

と表わされる。(32)式の右辺第二項は、 $i$  番目以外の操作量から  $i$  番目の制御量が受ける影響(相互干渉)を表わしている。いま、定常応答 ( $s=0$ ) に着目し第  $j$  制御量  $y_j$  を、

$$-Y_j \leq y_j \leq Y_j \quad j=1, 2, \dots, p \quad (33)$$

の範囲で動かすものとする。 $y_j$  の最大値を対応する操作量  $u_j$  だけで得るためには、

$$u_j = \pm Y_j / g_{jj}(0) \quad (34)$$

としなければならない。このような  $i$  以外の操作量の変化によって第  $i$  制御量  $y_i$  が動かされる最大値は、

$$\Delta y_{i \max}(0) = \sum_{j=1, j \neq i}^p |g_{ij}(0)| u_j(0) = \sum_{j=1, j \neq i}^p |g_{ij}(0)| \frac{|Y_j|}{|g_{jj}(0)|} \quad (35)$$

で与えられる。 $\Delta y_{i \max}(0)$  は非対応操作量によって生じる最大誤差であるから、相互干渉のために第  $i$  制御量に生じる相対的な誤差は  $\Delta y_{i \max}(0)$  と  $Y_i$  の比

$$\varepsilon_i = \Delta y_{i \max}(0) / Y_i = \sum_{j=1, j \neq i}^p |g_{ij}(0)| / |g_{jj}(0)| \cdot Y_j / Y_i \quad (36)$$

によって表わされる。ここで、 $p$  個の制御量の中で相互干渉によって生じる相対誤差が最大のもの、すなわち

$$\varepsilon_{\max}(0) = \max[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p] \quad (37)$$

をもって制御系全体の相互干渉の大きさを表わす指標としよう。 $\varepsilon_{\max}(0)$  を最大相対誤差と呼ぼう。 $\varepsilon_{\max}(0)$  は(36)式から分るように制御量の最大変化幅  $Y_j$  ( $j=1, 2, \dots, p$ ) に依存する。実際問題では  $Y_j$  は制御系の目的などにより定まってしまうが、仮に  $Y_j$  が自由に選べるものとしたときの最大相対誤差

$\varepsilon_{\max}(0)$  の最小値を求めてみよう。(36)式、

(37)式と  $Q(s)$  の干渉行列  $C(s|Q)$  を用いれば

$$C(0|Q)Y \leq \varepsilon_{\max} Y \quad (38)$$

†) を得る。ただし、 $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_p)^T$ 。したがって、ペロン・フロベニウスの定理から、

$$\varepsilon_{\max}(0) \geq \lambda(0|Q) \quad (39)$$

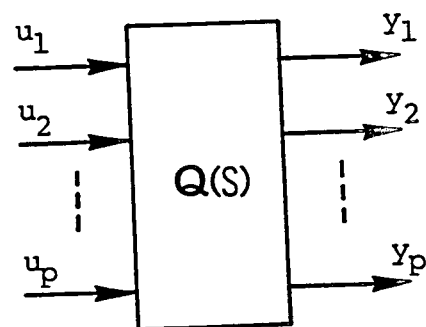


図. 4 開ループ制御系

†) この不等式は、要素ごとの不等式を意味している。

となる。等号が成立するのは、 $\underline{Y}$  が  $C(0|Q)$  の固有ベクトルである場合に限る。以上では、定常応答に着目したが正弦波に対する定常応答を考えれば、一般の周波数に対して (37) 式の  $\varepsilon_{\max}(0)$  に対応して  $\varepsilon_{\max}(j\omega)$  が定義でき、

$$\varepsilon_{\max}(j\omega) \geq \lambda(j\omega|Q) \quad (40)$$

が得られる。一般の制御系では正弦波応答を問題とすることは少ないが、過度応答を考える場合  $\varepsilon_{\max}(j\omega)$  は重要となる。すなわち、 $\varepsilon_{\max}(j\omega)$  が大きければ過度応答での相互干渉が大きくなる

さて、 $\underline{Y}_i$  を自由に選べるという上記の仮定は現実的でない。したがって (39) 式の等号は通常実現できない。しかし、(39) 式は最大相対誤差を小さくするためには干渉指数を小さくしなければならないことを意味している。この意味において干渉指数を、制御量が非対応操作量からうける相互干渉の大きさを表わす指標として用いることができる。

## 2. 5 開ループ系と閉ループ制御系の<sup>105)</sup>干渉指数の関係

前節では、開ループ系の干渉指数の物理的意味について述べ、開ループ系の相互干渉を減らすためには開ループ系の干渉指数を小さくしておかなければならないことを示した。ところで、実際の制御系、特に追値制御系の場合では、一つの目標値の変化に対して他の対応しない制御量になるべく動かないように閉ループ制御系を構成することが要求される。このような非干渉制御系を得るために近似対角化補償が行なわれる。従来から提案されている近似対角化補償要素の設計法は開ループ系のみかけ上の相互干渉を減らそうとする（すなわち、制御対象の伝達関数行列を  $G(s)$  としたとき  $Q(s) = G(s)K(s)$  を近似的に対角化する近似対角化補償要素  $K(s)$  を得ようとする）もので、閉ループ系の非干渉化に直接結びついた設計法ではない。もし開ループ系と閉ループ系の相互干渉の関係がある程度明らかにできれば、近似対角化補償要素の設計の段階から閉ループ系の相互干渉に対する配慮ができることになる。そこで、本節では干渉指数を用いて開ループ系と閉ループ系の相互干渉の大きさの関係を調べておく。

図 1. 1 の閉ループ系の目標値  $\underline{Y}$  から制御量  $\underline{u}$  への伝達関数行列  $L(s)$  は

$$L(s) = [I + Q(s)F(s)]^{-1} Q(s)F(s) \quad (41)$$



で与えられる。 $Q(j\omega)F(j\omega)$ の要素 $g_{ij}(j\omega)f_j(j\omega)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, p$ )の大きさが1に比べ十分小さければ

$$L(j\omega) \simeq Q(j\omega)F(j\omega) \quad (42)$$

が成立し

$$\lambda(j\omega|L) \simeq \lambda(j\omega|Q) \quad (43)$$

となることが予想される<sup>η)</sup>。また、 $g_{ii}(j\omega)f_i(j\omega)$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ )の大きさが十分大きければ、高ゲインフィードバックにより相互干渉は抑制され

$$L(j\omega) \simeq I \quad (44)$$

となり

$$\lambda(j\omega|L) \ll 1 \quad (45)$$

となることが期待される<sup>η)</sup>。しかし、 $|g_{ii}(j\omega)f_i(j\omega)|$ が1に近い場合の $\lambda(j\omega|L)$ と $\lambda(j\omega|Q)$ の関係は簡単でない。 $\lambda(j\omega|L)$ と $\lambda(j\omega|Q)$ の関係を数多くの例について数値的に調べてみた。 $p=4$ の場合の結果を図. 5に示した。この数値的検討では、各ループの前向きゲインが等しいものとし、

$$|g_{11}(j\omega)f_1(j\omega)| = |g_{22}(j\omega)f_2(j\omega)| = \dots = |g_{pp}(j\omega)f_p(j\omega)| = k \quad (46)$$

とおいた。 $k \geq 1$ では $g_{ii}(j\omega)f_i(j\omega)$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ )が1. 3のM円の外部にあり、かつ位相角が $0^\circ \sim -180^\circ$ の範囲にくるようにランダム<sup>†)</sup>に選んだ。また、 $k < 1$ では $g_{ii}(j\omega)f_i(j\omega)$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ )が1. 3のM円の外部にあり、かつ位相角が $0^\circ \sim -360^\circ$ の範囲にくるようにランダムに選んだ。非対角要素については、 $\lambda(j\omega|Q)$ が指定した値になるように $|g_{ij}(j\omega)f_j(j\omega)|$  ( $i, j = 1, 2, \dots, p; i \neq j$ )をランダムに決め、その後で位相角をランダムに決めた。図. 5 a)はこのようにして作った3000個のサンプルの開ループ系の干渉指数 $\lambda(j\omega|L)$ の存在範囲を示したものである。図. 5 b)は $\lambda(j\omega|L)$ の上限だけを示した。 $p=3, 5$ の場合についても1000個のサンプルに対して同様の数値的検討を行なった。 $p=3, 5$ の場合の $\lambda(j\omega|L)$ の上限をそれぞれ図. 5 c)、図. 5 d)に示した。これらの図より $k \simeq 1$ の付近では、開ループ系の干渉指数 $\lambda(j\omega|L)$ が開ループ系の干渉指数 $\lambda(j\omega|Q)$ に比べてかなり大きくなる可能性があることが分かる。また、 $k$ が十分小さければ(43)式が、十分大きければ(45)式

†) ここでは、乱数として一様分布を用いた。

が成立することが、確認される。

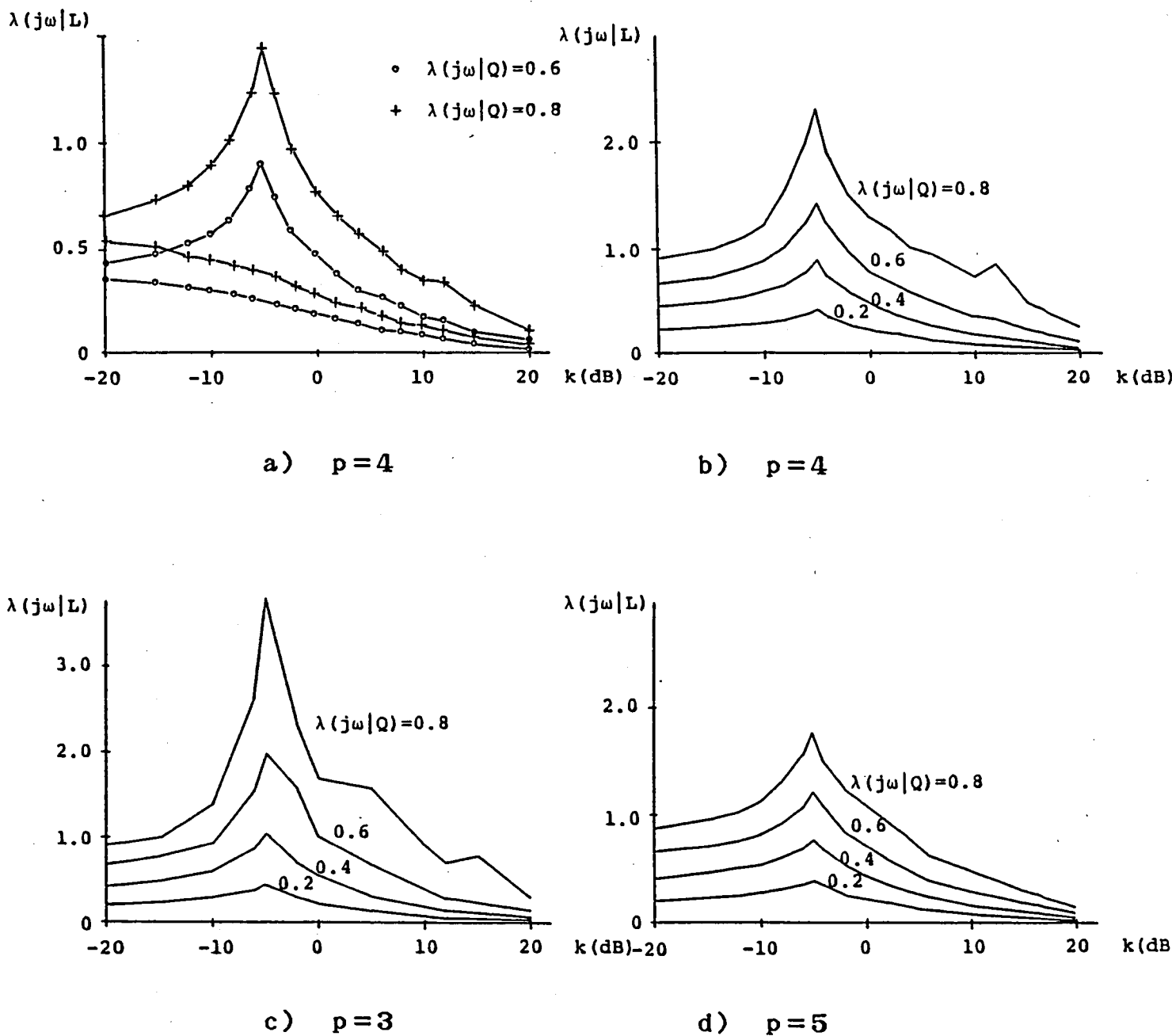


図. 5 閉ループ系干渉指数と開ループ系干渉指数・ループゲインとの関係

## 2. 6 フィードフォワード補償について <sup>106), 107)</sup>

閉ループ制御系では、高ゲインフィードバックによって外乱の影響を抑制している。も

し、外乱が観測可能であればこの外乱を検出しフィードフォワード補償を行うことによりさらに外乱の影響を軽減できるものと考えられる<sup>†)</sup>。本章では、このような場合のフィードフォワード補償要素の設計法について述べる。

図. 6に示した系を考える。 $\underline{w}$ はフィードフォワード補償を施す対象の操作量で $p$ 次元ベクトルである。 $\underline{y}$ は制御量を表わす $q$ 次元ベクトルである。 $d$ は外乱であり簡単のため一つとする。 $T(s) = (t_{ij}(s))$ は $\underline{w}$ から $\underline{y}$ への伝達関数行列で $q \times p$ の行列である。 $T_d(s) = (t_{d1}(s), t_{d2}(s), \dots, t_{dq}(s))^T$ は $d$ から $\underline{y}$ への伝達関数行列で、 $q$ 次の列ベクトルである。 $T(s)$ 、 $T_d(s)$ は既知とする。この対象に図. 6に示した $d$ からのフィードフォワード補償 $M(s) = (m_1(s), m_2(s), \dots, m_p(s))^T$ を施すことを考えよう。このとき、 $d$ から $\underline{y}$ への伝達関数行列 $N(s) = (n_1(s), n_2(s), \dots, n_q(s))^T$ は

$$N(s) = T(s)M(s) + T_d(s) \quad (47)$$

となる。いま、

$$N(s) = 0 \quad (48)$$

となるように $M(s)$ を選ぶことができれば、制御量 $\underline{y}$ は外乱 $d$ の影響を全くうけない。 $p = q$ であれば、 $N(s) = 0$ とする $M(s)$ は

$$M(s) = -T^{-1}(s)T_d(s) \quad (49)$$

で与えられる。しかし、このような $M(s)$ は、1) 一般に物理的に実現可能とは限らない、

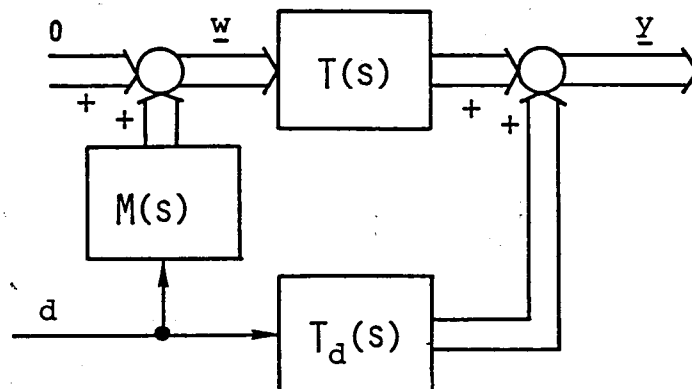


図. 6 フィードフォワード補償のための制御系

†) たとえば、ボイラに対してはこのようなフィードフォワード補償の有効性が古くから知られており、そのための研究がなされている (61)。

2) 実現可能であっても一般に非常に複雑なものとなる、3)  $T(s)$ ,  $T_d(s)$  が誤差を含んでいることを考慮すれば  $M(s)$  として複雑なものを用いることはあまり意味がない、などの問題がある。したがって、簡単な補償要素だけを用いて外乱の影響を小さくすることが重要となる。ここでは、ゲインだけを使ったフィードフォワード補償

$$M(s) = M = (m_1, m_2, \dots, m_p)^T \quad (50)$$

によって、なるべく  $N(s)$  を小さくすることを考える。しかし、多変数系を考えているのであるから  $N(s)$  はベクトルとなりその大小関係は一意には定義されない。そこで、一つの周波数  $\omega_0$  に着目して、 $N(j\omega_0)$  の要素の絶対値の二乗和

$$\phi = \sum_{i=1}^q |n_i(j\omega_0)|^2 \quad (51)$$

を最小にすることにする。

$\phi$  を最小とする  $M$  は次のようにして得られる。(47) 式より  $\phi$  は

$$\phi = \sum_{i=1}^q \left| \sum_{j=1}^p t_{ij}(j\omega_0) m_j + t_{di}(j\omega_0) \right|^2 \quad (52)$$

と表わされる。 $\phi$  が極値をとる必要条件是、

$$\partial \phi / \partial m_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (53)$$

である。いま、 $p$  次正方行列  $A, B$  と  $q$  次列ベクトル  $\underline{a}_d, \underline{b}_d$  を

$$A = (a_{ij}) \quad , \quad a_{ij} = \operatorname{Re} [t_{ij}(j\omega_0)] \quad (54)$$

$$B = (b_{ij}) \quad , \quad b_{ij} = \operatorname{Im} [t_{ij}(j\omega_0)] \quad (55)$$

$$\underline{a}_d = (\operatorname{Re} [t_{d1}(j\omega_0)], \operatorname{Re} [t_{d2}(j\omega_0)], \dots, \operatorname{Re} [t_{dq}(j\omega_0)])^T \quad (56)$$

$$\underline{b}_d = (\operatorname{Im} [t_{d1}(j\omega_0)], \operatorname{Im} [t_{d2}(j\omega_0)], \dots, \operatorname{Im} [t_{dq}(j\omega_0)])^T \quad (57)$$

と定義すれば、(53) 式の条件は、

$$(A^T A + B^T B) M + A^T \underline{a}_d + B^T \underline{b}_d = 0 \quad (58)$$

と書き表わされる。 $M$  は  $p$  次列ベクトルであるから (58) 式は未知数  $p$  個の連立一次方程式である。 $A^T A + B^T B$  が正則であれば (58) 式の解は

$$M = -(A^T A + B^T B)^{-1} (A^T \underline{a}_d + B^T \underline{b}_d) \quad (59)$$

で与えられる。伝達関数行列  $T(s)$  の形によっては  $A^T A + B^T B$  が正則でなくなる場合もある。その場合にも (58) 式が必ず解を有することは問題の性質からほぼ自明とも言えるが、直接には次のように示せる。まず、次の補題を証明しておく。

補題. 1  $A, B$  を同じサイズの実行列とすれば

$$\text{Range}(A^T A + B^T B) = \text{Range}(A^T) + \text{Range}(B^T) \quad (60)$$

である。ただし、 $\text{Range}(A)$  は行列  $A$  に伴う線形写像の値域空間である。 ■

【証明】  $\text{Range}(A^T A + B^T B)$  に属する任意のベクトルを  $\underline{y}$  とおけば、ベクトル  $\underline{x}$  が存在して

$$\underline{y} = (A^T A + B^T B) \underline{x} = A^T(A \underline{x}) + B^T(B \underline{x}) \quad (61)$$

とかけるから

$$\text{Range}(A^T A + B^T B) \subset \text{Range}(A^T) + \text{Range}(B^T) \quad (62)$$

は明らかである。以下では、

$$\text{Range}(A^T A + B^T B) \supset \text{Range}(A^T) + \text{Range}(B^T) \quad (63)$$

を証明する。そのため、まず

$$\text{Null}(A^T A + B^T B) \subset \text{Null}(A) \cap \text{Null}(B) \quad (64)$$

を示す。ただし、 $\text{Null}(A)$  は行列  $A$  の零空間とする。 $\underline{x}$  を  $\text{Null}(A^T A + B^T B)$  に属する任意のベクトルとすると

$$\begin{aligned} \underline{x}^T (A^T A + B^T B) \underline{x} &= \underline{x}^T A^T A \underline{x} + \underline{x}^T B^T B \underline{x} \\ &= \|A \underline{x}\|^2 + \|B \underline{x}\|^2 = 0 \end{aligned} \quad (65)$$

より、

$$A \underline{x} = 0, \quad B \underline{x} = 0 \quad (66)$$

を得る。すなわち、

$$\underline{x} \in \text{Null}(A), \quad \underline{x} \in \text{Null}(B) \quad (67)$$

である。以上で (64) 式が示された。

次に、(63) 式を示す。 $\underline{x}_1, \underline{x}_2$  をそれぞれ  $\text{Range}(A^T), \text{Range}(B^T)$  に属する任意のベクトルとする。一般に、

$$\text{Range}(A^T) \perp \text{Null}(A), \quad \text{Range}(B^T) \perp \text{Null}(B) \quad (68)$$

であるから

$$\underline{x}_1 \perp \text{Null}(A), \quad \underline{x}_2 \perp \text{Null}(B) \quad (69)$$

ゆえに、

$$\underline{x}_1 + \underline{x}_2 \perp \text{Null}(A) \cap \text{Null}(B) \quad (70)$$

となり、(64) 式より

$$\underline{x}_1 + \underline{x}_2 \perp \text{Null}(A^T A + B^T B) \quad (71)$$

ところで、 $A^T A + B^T B$  は  $p$  次の対称行列であるから

$$\text{Range}(A^T A + B^T B) = \text{Null}(A^T A + B^T B)^\perp \quad (72)$$

したがって、(71)式より

$$\underline{x}_1 + \underline{x}_2 \in \text{Range}(A^T A + B^T B) \quad (73)$$

すなわち、(63)式が示された。

〔証明終わり〕

さて、(58)式の連立方程式に戻ろう。上の補題は、任意の $q$ 次ベクトル $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ に対して

$$(A^T A + B^T B)\underline{y} = A^T \underline{x}_1 + B^T \underline{x}_2 \quad (74)$$

となる $\underline{y}$ が必ず存在することを意味している。 $\underline{x}_1 = -\underline{a}_d, \underline{x}_2 = -\underline{b}_d$ とすれば、 $A^T A + B^T B$ が正則でなくても(58)式の解が存在することになる。 $A^T A + B^T B$ が正則でない、すなわち、そのランクが $r < p$ である場合をフィードフォワード補償に則して考えれば、 $p$ 個の操作量のうち適当な $r$ 個だけにフィードフォワード補償をするだけで、 $\phi$ を最小にすることができることを意味している。

以上では、簡単のため外乱が一つと仮定したが外乱が多数ある場合にもそのまま適用できる。いま、観測できる外乱が $m$ 個あるものとしよう(図. 7参照)。操作量 $\underline{w}$ から制御量 $\underline{y}$ への伝達関数行列を $T(s) = (t_{ij})$ とする。また、外乱 $d_l$ から制御量 $\underline{y}$ への伝達関数行列をそれぞれ $T_{d_l}(s) = (t_{d_{l1}}(s), t_{d_{l2}}(s), \dots, t_{d_{lg}}(s))^T$ とする( $l = 1, 2, \dots, m$ )。各外乱からフィードフォワード補償 $M_l$ を施したときの $d_l$ から $\underline{y}$ への伝達関数行列 $N_l(s)$ は、

$$N_l(s) = T(s)M_l + T_{d_l}(s) \triangleq (n_{l1}(s), n_{l2}(s), \dots, n_{lg}(s))^T \quad (75)$$

で与えられる。各外乱に対して周波数 $\omega_{0l}$ を選び、

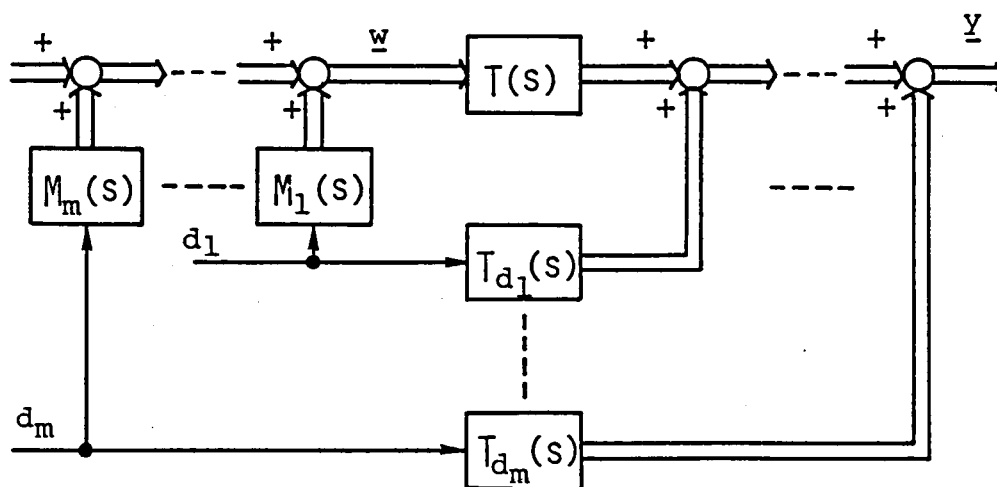


図. 7 複数の外乱がある系のフィードフォワード補償

$$\phi_2 = \sum_{i=1}^q |n_{2i}(j\omega_{02})|^2 \quad (76)$$

とおく。 $\phi_2$ は他のフィードフォワード補償要素 $M_k (k \neq l)$ に関係しないから、 $\phi_2$ を最小とするフィードフォワード補償 $M_2$ はそれぞれ独立に次の方程式を解くことによって得られる。

$$(A^T A + B^T B) M_2 + A^T \underline{a}_{d2} + B^T \underline{b}_{d2} = 0 \quad (77)$$

ただし、 $A, B$ は(54)、(55)式でそれぞれ与えられる。また、 $\underline{a}_{d2}, \underline{b}_{d2}$ は

$$\underline{a}_{d2} = (\operatorname{Re}[t_{d2_1}(j\omega_{02})], \dots, \operatorname{Re}[t_{d2_q}(j\omega_{02})])^T \quad (78)$$

$$\underline{b}_{d2} = (\operatorname{Im}[t_{d2_1}(j\omega_{02})], \dots, \operatorname{Im}[t_{d2_q}(j\omega_{02})])^T \quad (79)$$

で与えられる $q$ 次のベクトルである。

## 2. 7 直列補償法<sup>101)-103), 108)</sup>

### 1. 制御系の構成

ここでは、2. 1～5の結果を基に多変数系の直列補償法を提案する。多変数制御系の主な目的としては、

- 1) 対応する入出力間の特性（定常特性、過度特性等）の改善
- 2) 外乱の影響の軽減
- 3) 非対応入力による出力への影響の軽減
- 4) 制御対象の特性の変化による影響の軽減

などを考える。当直列補償法では、図. 8に示した閉ループ制御系を構成する。図. 8において $G'(s)$ は $p$ 入力 $p$ 出力の制御対象の伝達関数行列である。 $P, K(s), F(s)$ は

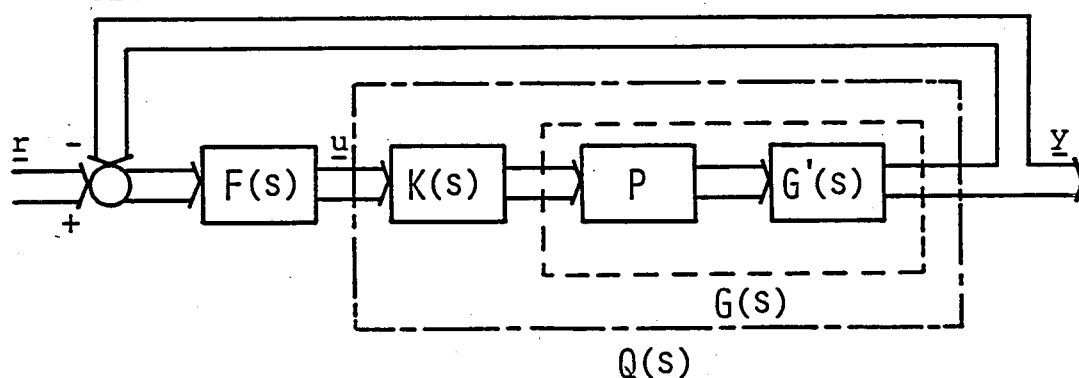


図. 8 直列補償のための制御系の構成

補償要素を役割別に分けたもので、それぞれ次の役割をもっている。P は対応する操作量と制御量を決定するために操作量の番号をつけかえる置換行列である。K(s) はみかけ上の相互干渉を減らすための近似対角化補償要素である。F(s) = diag ( f<sub>1</sub>(s), f<sub>2</sub>(s), ---, f<sub>p</sub>(s) ) は、P I D 調節計や位相遅れ、位相進み補償要素などで構成される主制御器である。このように補償要素を三つの部分に分ける考え方はもともと Rosenbrock によって<sup>5)</sup>提案されたものである。

$$G(s) = G'(s) P, \quad Q(s) = G(s) K(s) \quad (80)$$

とおく。P, K(s), F(s) の設計手順を次に述べる。

## 2. 設計手順

図. 8 の制御系の補償要素の設計法について述べる。設計は P, K(s), F(s) の順に行なう。それぞれの補償要素の設計は周波数応答法による一入力一出力系の場合と同様試行錯誤的に行なわれるものとする。したがって、それぞれの補償要素の設計段階で不都合が生じた場合は適当な前の段階に戻って補償要素を再設計することになる。

これらの補償要素の設計方法を以下で述べる。

### 1. 入出力対の決定

操作量と制御量の対応が物理的に明らかな場合は、その対応を採用する。物理的な対応が明らかでない場合は、妥当と思われる入出力の組み合わせについてそれぞれ  $G(s) = G'(s) P$  の干渉指数  $\lambda(s|G)$  を求め、干渉指数が平均的に小さくなる入出力の組み合わせを選ぶ。

### 2. 近似対角化補償要素の設計

近似対角化補償要素の設計手法としては従来から、朴他 14) Schafer 他 17)、Hawkins 18)、19)、Mason-Daly 20) や Leininger 21) などによっていろいろな手法が提案されている。ただし、これらの手法は開ループ系の相互干渉を減すことを目的とした設計法であり、閉ループ系の相互干渉の軽減には直接結び付いていない。次項で、閉ループ系の相互干渉を考慮した開ループ系の近似対角化の指針について述べる。この指針のもとに、これらの手法を用いて近似対角化補償要素を設計することができる。

### 3. 主制御器の設計

Q(s) の一般化ゲルシュゴリン帯を幅のあるベクトル軌跡とみなして、周波数応答法に



よる一入力一出力系の設計法を適用して各ループの主制御器  $f_i(s)$  を設計する。このとき、各ループの一般化ゲルシュゴリン帯の外縁（一般化ゲルシュゴリン擬似帯の場合は上側）をベクトル軌跡とみなして  $f_i(s)$  を決定すれば、安全な（安定度余裕の大きな）制御系設計が行なえる。主制御器  $f_i(s)$  を変えたとき一般化ゲルシュゴリン擬似帯は基準線が変わるだけで、その幅（基準線に重ねられる一般化ゲルシュゴリン擬似円板の大きさ）は不変であるから、一入力一出力系の直列補償法のようにゲイン補償、位相補償などを用いて主制御器  $f_i(s)$  の設計をすすめる場合には見当がつけやすく便利である。また、 $M_p =$  一定を制御系設計の指針として主制御器  $f_i(s)$  の設計を行なう場合は 2.3 で述べた  $M_p$  修正一般化ゲルシュゴリン帯を用いることができ、より正確なパラメータ設定が可能である。プロセス系などにおいて、PID 調節計のパラメータを決定する場合は一般化ゲルシュゴリン帯の外縁と実軸との交点から安定限界と持続振動周期を読み取り、それをもとにジグラーニコルスの限界感度法を適用することが考えられる。

なお、以上の方法では一般化ゲルシュゴリン円板の大きさだけ主制御器  $f_i(s)$  のパラメータ設定が不正確になる。すなわち、第  $i$  ループの一巡伝達関数  $h_i(s|F) f_i(s)$  のベクトル軌跡は  $i$  番目の一般化ゲルシュゴリン帯の中を通過しており、このままではゲイン不足となっている。そこで、 $h_i(s|F) f_i(s)$  ( $i=1, 2, \dots, P$ ) のベクトル軌跡を求め、ゲインの再調節をする必要がある。このとき、 $h_i(s|F)$  が他のループの主制御器  $f_j(s)$  ( $j=1, 2, \dots, P; j \neq i$ ) の影響を受けて変動することに注意しなければならない。ただし、その変動は一般化ゲルシュゴリン帯の中におさまるから  $\lambda(j\omega|Q) < 1$  が実現されていればこのゲイン再調節は数回の試行錯誤で終えることができる。

### 3. 近似対角化の指針

ここでは、干渉指数を使って閉ループ系の相互干渉の大きさを考慮した開ループ系の近似対角化の指針を与える。まず、周波数帯を設計完了時の  $g_{ii}(j\omega) f_i(j\omega)$  ( $i=1, 2, \dots, P$ ) のゲインをもとに、次の三つに分けよう。

低周波数帯  $[0, \omega_a]$ ;  $g_{ii}(j\omega) f_i(j\omega)$  のゲインが十分大きな周波数帯

中間周波数帯  $[\omega_a, \omega_b]$ ;  $g_{ii}(j\omega) f_i(j\omega)$  のゲインが 1 付近となる周波数帯

高周波数帯  $[\omega_b, \infty)$ ;  $g_{ii}(j\omega) f_i(j\omega)$  のゲインが十分小さな周波数帯

2.5 によれば、 $g_{ii}(j\omega) f_i(j\omega)$  ( $i=1, 2, \dots, P$ ) のゲインが十分大きければ、高

ゲインフィードバックにより閉ループ系の相互干渉は抑制される。したがって、低周波数帯では  $Q(s)$  の干渉指数  $\lambda(j\omega|Q)$  をそれほど小さくする必要はない。ただし、 $\lambda(j\omega|Q) \geq 1$  であれば、一般化ゲルシュゴリン擬似帯が点 (0 dB,  $-180^\circ$ ) を含むことになり定理 2.4 の安定条件を満たすことが不可能となる。したがって、安定性を保証するためには低周波数帯で  $\lambda(j\omega|Q) < 1$  とすることが必要である。次に中間周波数帯について考えよう。2.5 によれば、この周波数帯では閉ループ系の相互干渉が開ループ系の相互干渉に比べかなり大きくなる可能性がある。したがって、特に追値制御のように過度応答の改善や閉ループ系の非干渉化を目的とする場合には、この周波数帯で  $\lambda(j\omega|Q)$  を十分小さくしておく必要がある。具体的な  $\lambda(j\omega|Q)$  の値は制御系に要求される性能にもよるが、一般的には  $\lambda(j\omega|Q) \simeq 0.2 \sim 0.3$  であれば十分であると思われる。高周波数帯では全体のゲインが下がるため  $\lambda(j\omega|Q)$  の値を特に気にする必要はないと考えられる。なお、以上の検討では周波数を設計が完了した時点での  $g_{ii}(j\omega) f_i(j\omega)$  のゲインをもとに分けている。実際の制御系の設計に当っては、制御対象  $G'(s)$  の特性や制御系に要求される速応性等の仕様条件からそれぞれのループで  $g_{ii}(j\omega) f_i(j\omega)$  のゲインが 1 に近くなる周波数帯  $[\omega_{a_i}, \omega_{b_i}]$  の見当をつけ、中間周波数帯  $[\omega_a, \omega_b]$  として  $[\omega_{a_i}, \omega_{b_i}]$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) を含むように選べばよい。

## 2.8 フィードフォワード補償法<sup>106), 107)</sup>

2.6 で述べたフィードフォワード補償は制御対象の周波数応答を基に決定される。したがって、前節で提案した周波数応答を使った多変数閉ループ制御系の設計法とともに用いられるのに適した方法といえる。ここでは、2.6 の結果をもとに前節で提案した手法で設計された閉ループ系に対してフィードフォワード補償を施す場合の方法について述べる。制御系として図. 9 を考える。図. 9 において、 $G'(s)$  は操作量  $\underline{u}$  から制御量  $\underline{y}$  への伝達関数行列、 $G'_d(s)$  は外乱  $\underline{d}$  から  $\underline{y}$  への伝達関数行列 (ベクトル) である。 $C(s)$  は、2.7 で述べた方法で設計された置換行列、近似対角化補償要素、主制御器から構成される補償要素である。 $M$  はフィードフォワード補償である。このとき、 $\underline{w}$  から  $\underline{y}$  への伝達関数行列  $T(s)$  と  $\underline{d}$  から  $\underline{y}$  への伝達関数行列  $T_d(s)$  はそれぞれ、

$$T(s) = [I + G'(s)C(s)]^{-1} G'(s) \quad (81)$$

$$T_d(s) = [I + G'(s)C(s)]^{-1} G'_d(s) \quad (82)$$

で与えられる。(81)、(82)式で与えられる伝達関数行列を2.6のフィードフォワード補償の対象となる制御系の伝達関数行列  $T(s)$ 、 $T_d(s)$  と考えフィードフォワード補償要素を決定する。

着目する周波数 $\omega_0$ としては、外乱に弱くなる周波数を選べばよい。今の場合、外乱に弱い周波数帯は各ループの一巡伝達関数のゲインが1に近くなる中間周波数帯 $[\omega_a, \omega_b]$ と考えられるから、 $\omega_0$ としては中間周波数帯の中から選ぶことになる。ただし、このようにして定めた $\omega_0$ の近くで  $T(j\omega)$ 、 $T_d(j\omega)$  が急激に変化しているときには、フィードフォワード補償が有効に働く周波数帯が非常に狭くなり、その効果がほとんど現われない場合も生じる。このようなときには、 $\omega_0$ を  $T(j\omega)$ 、 $T_d(j\omega)$  の変化のゆるやかな、より低い周波数の点に移動して設計をやり直したほうがよい結果が得られるようである。なお、このようにして得られるフィードフォワード補償要素Mには、 $T(j\omega) \simeq T(j\omega_0)$  かつ  $T_d(j\omega) \simeq T_d(j\omega_0)$  となる周波数 $\omega$ に対して補償能力がある。

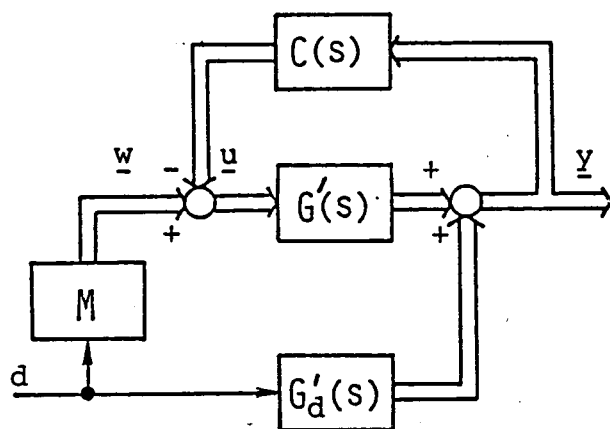


図. 9 フィードフォワード補償のための制御系の構成

## 2. 9 制御系への適用例

### 1. ガスタービンの制御系 (101)-103), 109)

2. 7で提案した閉ループ制御系の設計法の特徴を明らかにするためMcMorranが I N A<sup>26)</sup>法の例として用いたガスタービンを制御対象として、設計の過程をたどっておきたい。ここで考えるガスタービンの操作量、制御量はそれぞれ次の通りである。

操作量  $\Delta A_d$  ; ジェット・ノズル面積

$\Delta Q_d$  ; 燃料流量

制御量  $\Delta N_H$  ; 高圧タービン回転数

$\Delta N_L$  ; 低圧タービン回転数

$\underline{u} = (\Delta A_d, \Delta Q_d)^T$ 、 $\underline{y} = (\Delta N_H, \Delta N_L)^T$  としたとき、 $\underline{u}$  から  $\underline{y}$  への伝達関数行列  $G'(s)$  は、

$$G'(s) = \frac{1}{p(s)} \begin{pmatrix} 14.96(s+1.7)(s+100) & 95150(s+1.898)(s+10) \\ 85.2(s+1.44)(s+100) & 124000(s+2.037)(s+10) \end{pmatrix} \quad (83)$$

$$p(s) = (s^2 + 3.225s + 2.525)(s+10)(s+100) \quad (84)$$

で与えられる。

まず、操作量と制御量に一对一の対応をつける。いまの場合、二入力二出力系であるから置換行列  $P$  としては

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (85)$$

の二通りが考えられる。 $G'(s)P_1$  と  $G'(s)P_2$  の干渉指数  $\lambda(j\omega|G'P_1)$  と  $\lambda(j\omega|G'P_2)$  を図. 10 に示した。全周波数帯にわたって

$$\lambda(j\omega|G'P_2) < \lambda(j\omega|G'P_1) \quad (86)$$

であるから、置換行列  $P$  として  $P_2$  を選ぶ。

次に、 $G(s) = G'(s)P_2$  に対して近似対角化補償を行なう。ここでは、近似対角化補償要素  $K(s)$  の設計に朴らによって提案されたボード線図法を用いた。<sup>14)</sup> 中間周波数帯を [50, 100] としてこの周波数帯で特に  $Q(s) = G(s)K(s)$  の干渉指数  $\lambda(j\omega|Q)$  が小さくなるように  $K(s)$  を、

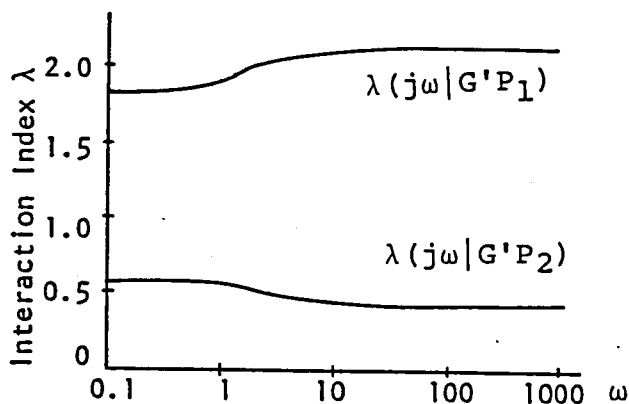


図. 10 ガスタービンの干渉指数

$$K(s) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1450(s+12)/(s+100) & 6310(s+12)/(s+100) \end{pmatrix} \quad (87)$$

と定めた。この結果、 $10 \leq \omega \leq 1000$  に対して  $\lambda(j\omega|Q) < 0.1$  が実現されている (図. 11 参照)。

主制御器  $F(s)$  を設計する。 $Q(s) = (g_{ij}(s))$  の一般化ゲルシュゴリン擬似帯を図. 12 に示した ( $f_1(s) = f_2(s) = 1$  としている。したがって、この一般化ゲルシュゴリン擬似帯の基準線は  $g_{11}(s)$ ,  $g_{22}(s)$  のゲイン位相線図となっている)。この一般化ゲルシュゴリン擬似帯に対し古典的な設計法を適用して主制御器  $F(s)$  を次のように決定した。

$$F(s) = \text{diag}(0.18, 0.0096(1 + \frac{1}{0.2s})) \quad (88)$$

以上の方法で設計された閉ループ制御系のステップ応答を図. 13 に示した。また、McMorran が I NA 法を用いて設計した閉ループ制御系のステップ応答も図. 13 に破線で示した。McMorran の設計方法と比較すれば、ここで述べた設計法は次の二つの点で改善されている。第一に McMorran は伝達関数行列  $G'(s)$  の要素のバランスをとるために前置補償器  $K_a$  を必要とした。これに対し、一般化ゲルシュゴリン擬似帯の幅はループ間のバラン

スがとれているため本設計法ではこのような前置補償器を必要としない。第二に I NA 法では安定性を補償するために高い周波数まで逆伝達関数行列を対角優勢にしなければならない。このため McMorran は  $\omega = 0$  と  $\infty$  で逆伝達関数行列が対角行列となるような近似対角化補償要素を用いている。これに対し、本設計法では主に中間周波数帯だけを近似対角化すればよいため、

McMorran の設計した近似対角化補償より簡単なものとなっている。

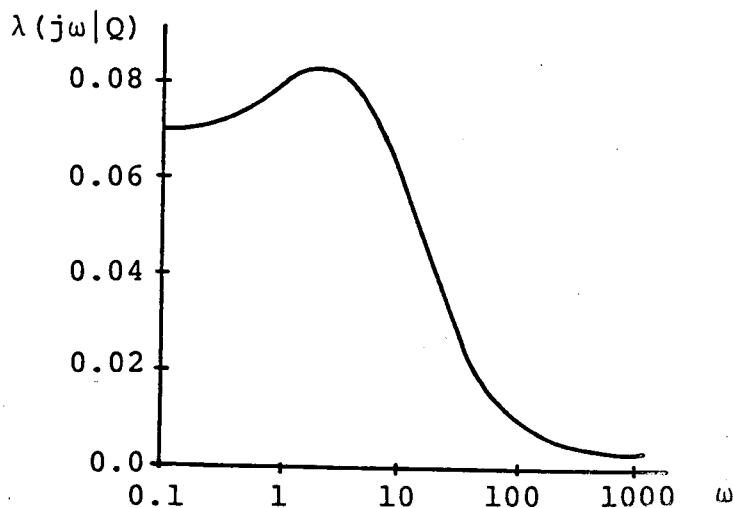
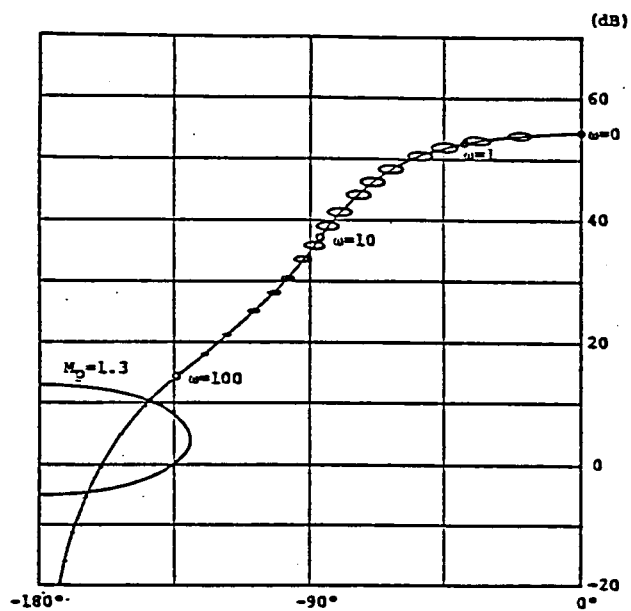
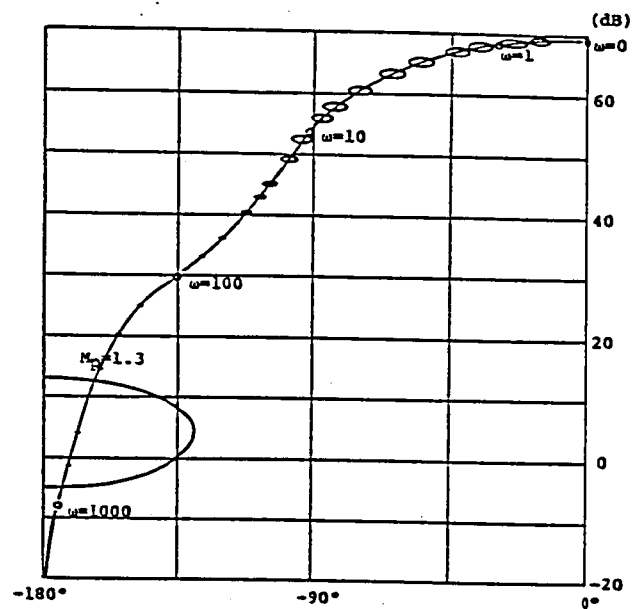


図. 11 近似対角化補償後の開ループ系の干渉指数

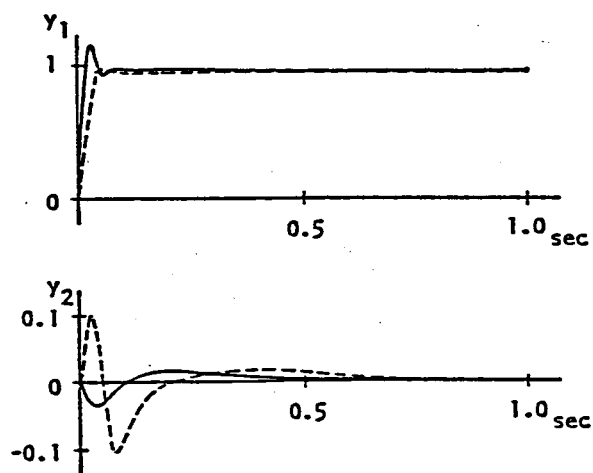


a) 第一ループ

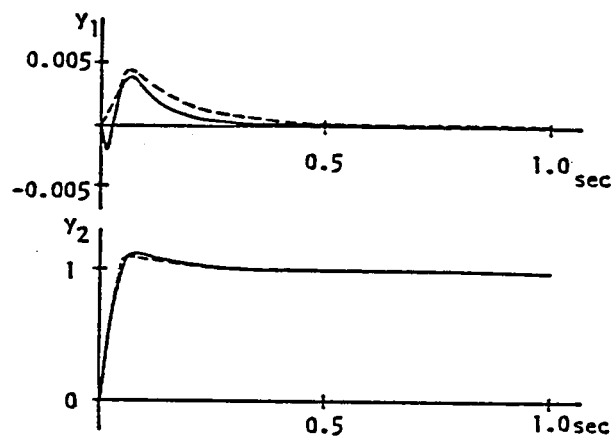


b) 第二ループ

図. 12  $Q(s)$  の一般化ゲルシュゴリン擬似帯



a)  $r_1=1, r_2=0$



b)  $r_1=0, r_2=1$

図. 13 閉ループ系のステップ応答

## 2. ボイラの制御系

本文で提案した直列補償法とフィードフォワード補償法を、ドラム型ボイラに適用する。

ボイラの模式図を図. 14に示した。このボイラの操作量は次の四つである。

操作量  $q_{sp1}$  ; スプレイ1の流量

$q_{sp2}$  ; スプレイ2の流量

$q_{1e}$  ; 給水流量

$r$  ; 燃料流量

制御目的は、負荷変動時の温度、蒸気圧、ドラムレベルの変動を極力おさえることである。

負荷変動としてはスーパーヒータ3の出口蒸気流量  $q_{4a}$  のステップ状変化を考え、制御量としては次の四つの量をとることにする。

制御量  $\theta_{3a}$  ; スーパーヒータ2の出口温度

$\theta_{4a}$  ; スーパーヒータ3の出口温度

$l$  ; ドラムレベル

$P_{4a}$  ; スーパーヒータ3の出口蒸気圧力

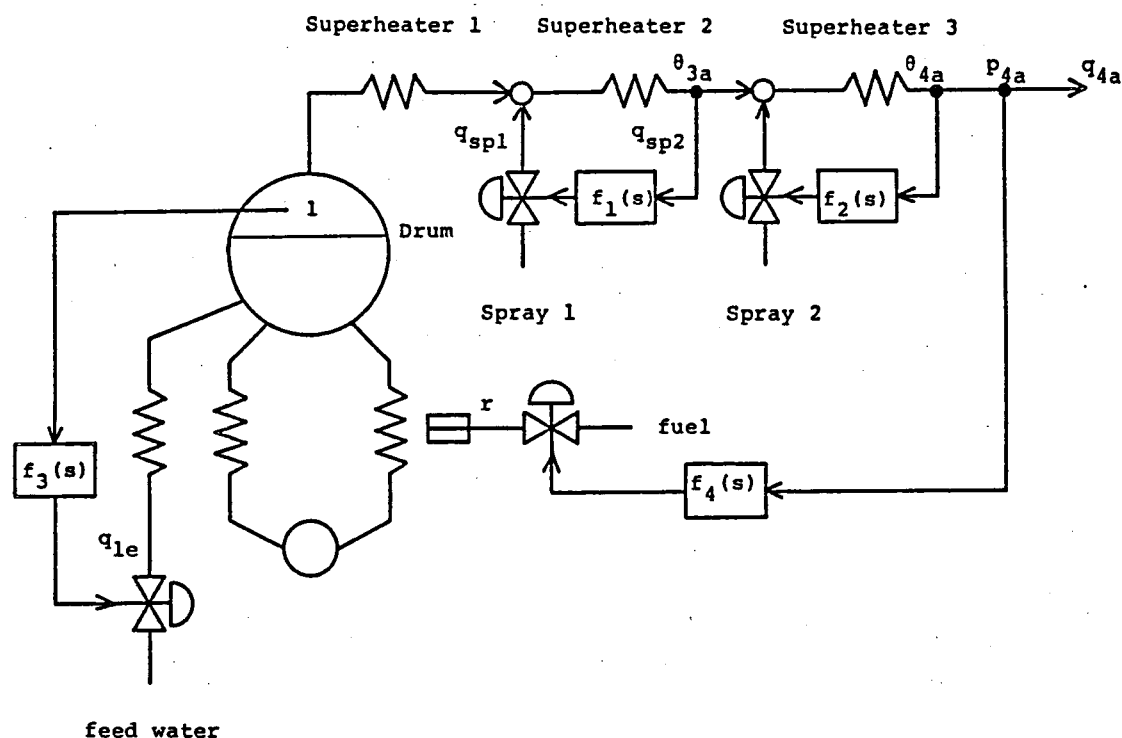


図. 14 ボイラの模式図

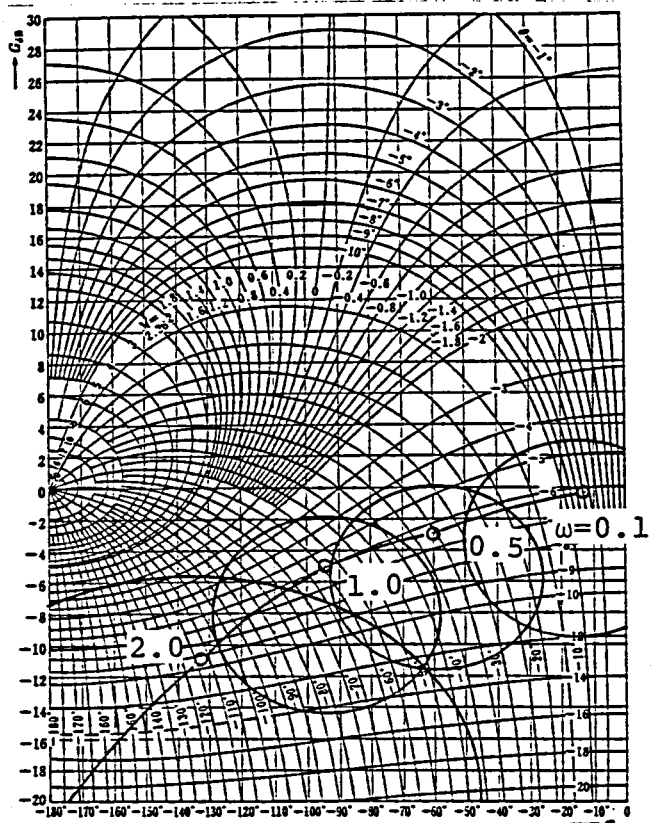
蒸気圧が大幅に変動しないという前提の下では、 $q_{4a}$  は弁開度によって一意に定まると考えられるので出口弁開度信号を用いてフィードフォワード補償することが可能である。このボイラの制御系統としては、温度系統  $\theta_{3a} - q_{sp1}$ 、 $\theta_{4a} - q_{sp2}$ 、水位系統  $l - q_{1e}$ 、圧力系統  $p_{4a} - r$  の四つがあり、それぞれ図. 14 に  $f_1(s)$ 、 $f_2(s)$ 、 $f_3(s)$ 、 $f_4(s)$  で示した主制御器が挿入されている。これらの主制御器は2.7で述べた方法によって次のようにして設計された。定常偏差をなくするためには積分性の補償が不可欠であるから主制御器としてはじめにP I 調節器を考えることにした。さらに、温度系統には微分動作として位相進み要素を挿入することにした。 $u = [q_{sp1}, q_{sp2}, q_{1e}, r]^T$ 、 $y = [\theta_{3a}, \theta_{4a}, l, p_{4a}]^T$  とする。 $u$  から  $y$  への伝達関数行列  $G'(s)$  の一般化ゲルシュゴリン擬似帯を図. 15 に示した。P I 調節器の積分時間は次のようにして決定した。第一、二、三ループについては、この一般化ゲルシュゴリン擬似帯にジークラ・ニコルスの限界感度法を適用してP I 調節器の積分時間を決定した。第四ループについては、位相余裕が  $30^\circ$  以上となるように積分時間を決定した。温度系統に挿入する位相進み補償のパラメータはP I 調節器を挿入したあとの第一、第二ループの周波数特性に着目して決定した。ゲインは、はじめに他のループを閉じたときの各ループのMpの値が1.3となるように設定しておき、シミュレーションの結果をみて再調整した。以上の結果主制御器として、

$$\begin{cases} f_1(s) = 2.4 \left(1 + \frac{1}{1.74s}\right) \left(\frac{1+1.05s}{1+0.105s}\right) \\ f_2(s) = 1.6 \left(1 + \frac{1}{3.3s}\right) \left(\frac{1+1.58s}{1+0.158s}\right) \\ f_3(s) = 2.0 \left(1 + \frac{1}{2.0s}\right) \\ f_4(s) = 8.0 \left(1 + \frac{1}{8s}\right) \end{cases} \quad (89)$$

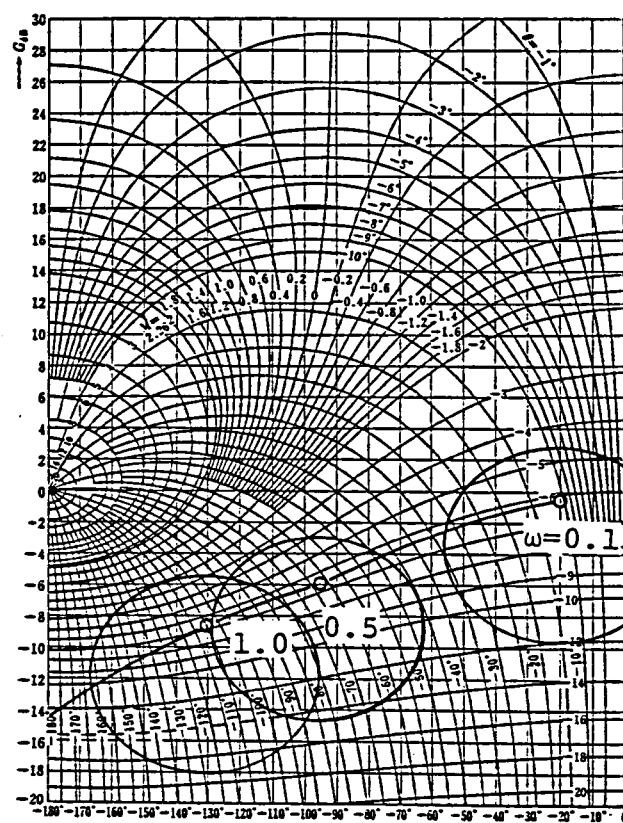
を得た。他のループを(89)式の  $f_i(s)$  で閉じたときの各開ループ系の伝達関数  $h_i(s|F)f_i(s)$  のゲイン位相線図を図. 16 に示した。また、 $q_{4a}$  が11.3%ステップ状に変化したときの制御量の応答を図. 17 に示した。

さて、(89)式の主制御器が附加されたボイラに対して、フィードフォワード補償を施す。すなわち、図. 18の破線で囲んだ部分をフィードフォワード補償の対象とみなして、 $q_{4a}$  から  $y$  へのフィードフォワード補償  $M$  を決定する。図. 18において  $G'(s)$  は操作量  $u$  から制御量  $y$  への伝達関数行列、 $G_d(s)$  は  $q_{4a}$  から  $y$  への伝達関数行列である。 $F(s)$  は(89)式で与えられる主制御器である。このとき、フィードフォワード補償の対象となる伝達関数行列  $T(s)$ 、 $T_d(s)$  ((81)、(82)式参照)は、

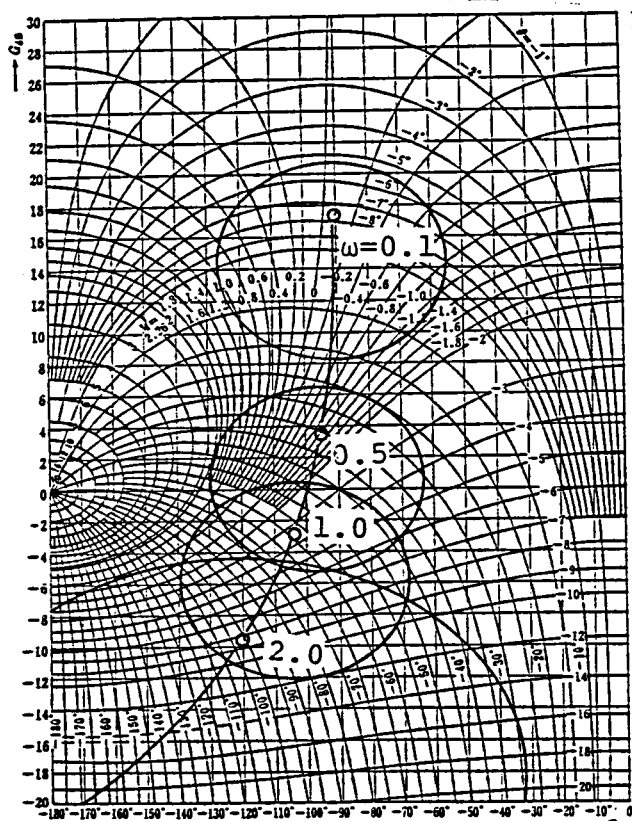




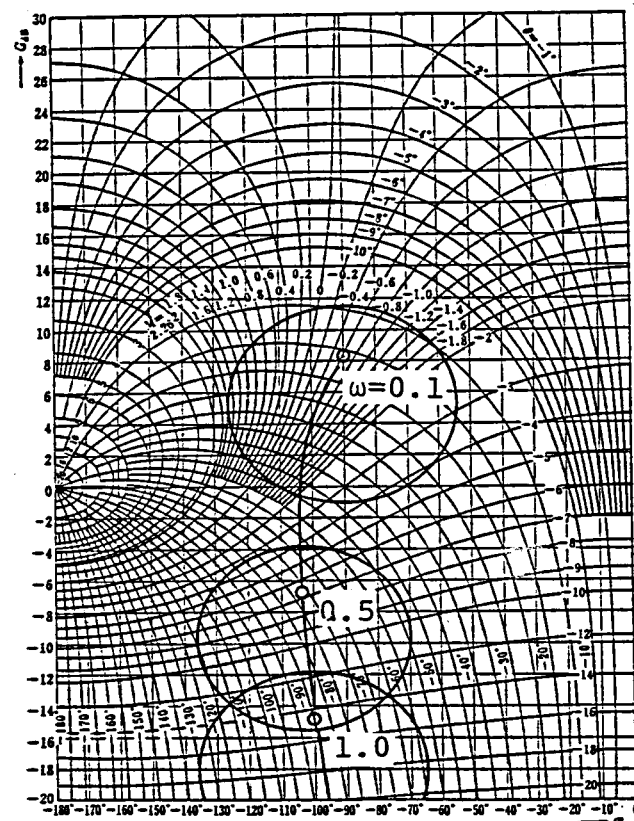
a) 第一ループ



b) 第二ループ

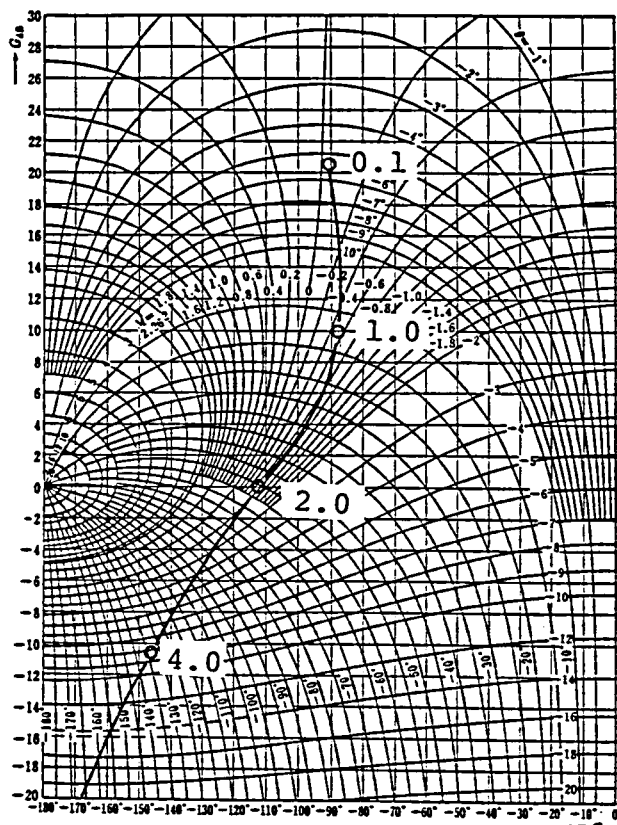


a) 第三ループ

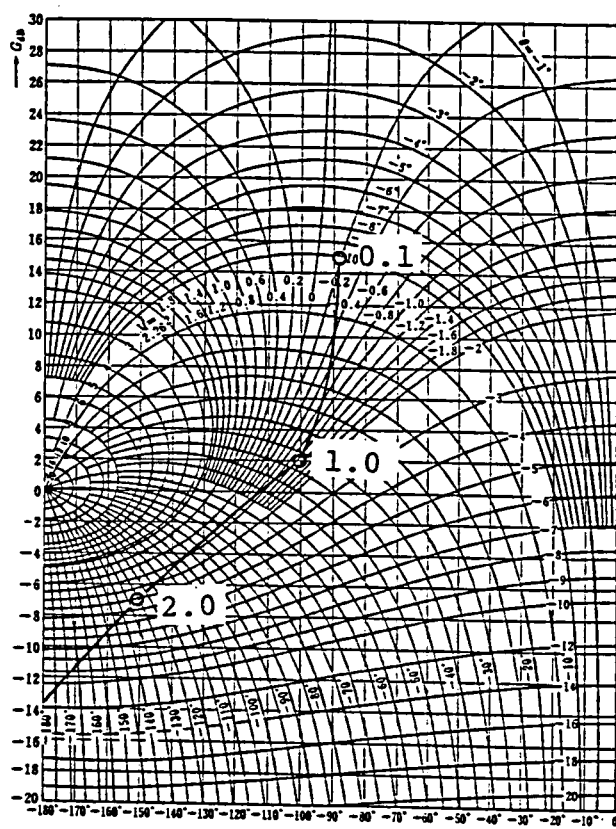


d) 第四ループ

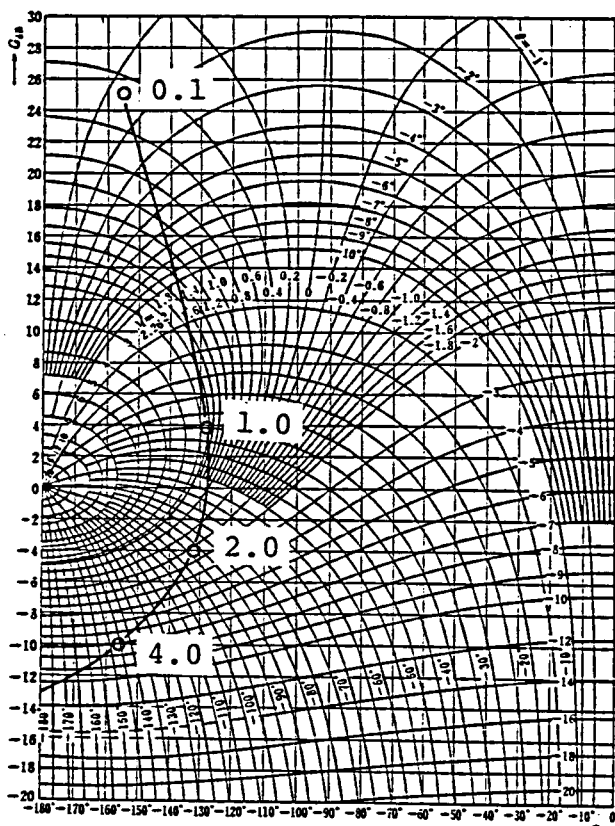
図. 15 ボイラの一般化ゲルシュゴリン擬似帯



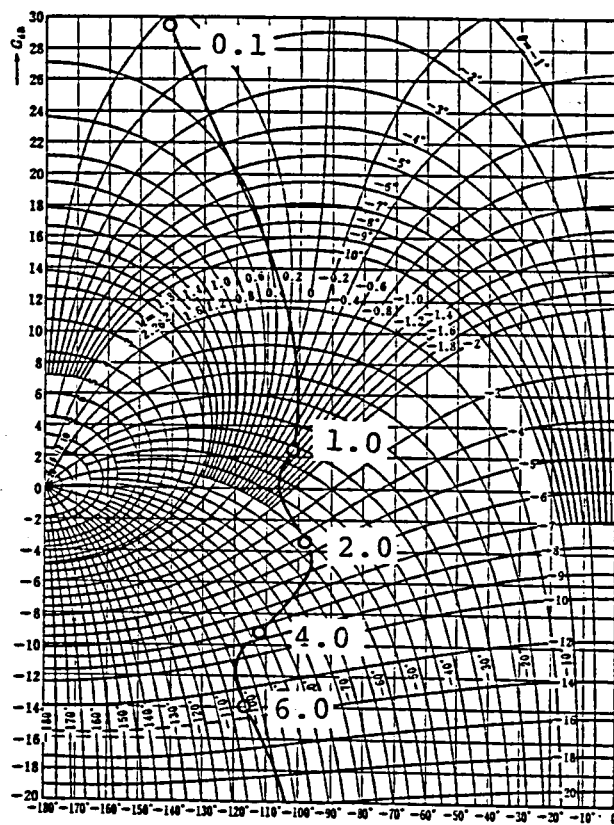
a) 第一ループ



b) 第二ループ



c) 第三ループ



d) 第四ループ

図. 16 他のループを(89)式の主制御器で閉じたときの  
各ループの開ループ伝達関数のゲイン位相線図

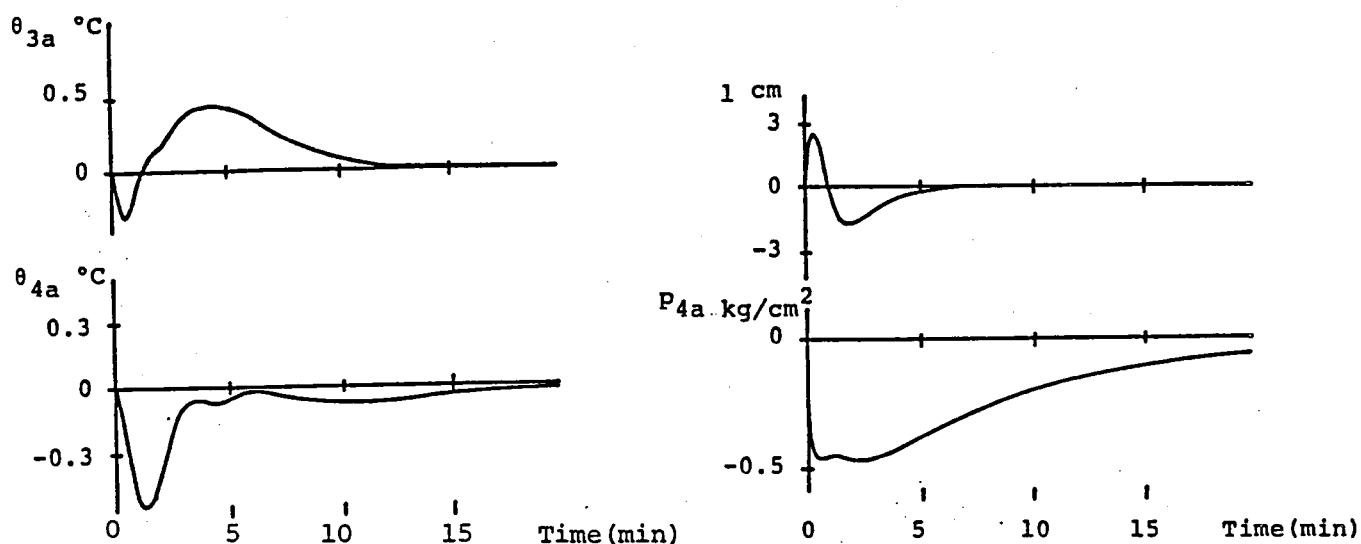


図. 17 フィードフォワード補償をしない制御系の応答

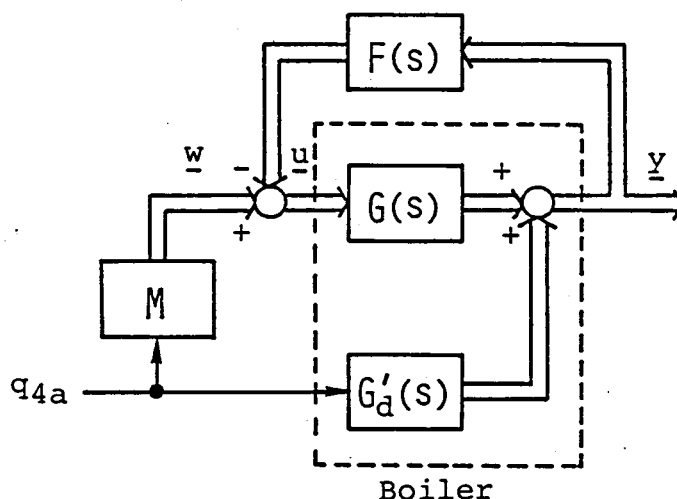


図. 18 フィードフォワード補償を施したボイラの制御系

$$T(s) = [I + G'(s) F(s)]^{-1} G'(s) \quad (90)$$

$$T_d(s) = [I + G'(s) F(s)]^{-1} G'_d(s) \quad (91)$$

で与えられる。 $T(s) T_d(s)$  の各要素のボード線図を図. 19に示した。<sup>†)</sup> 図. 16より一

†)  $M$ として $-T^{-1}(s) T_d(s)$  を用いれば、 $q_{4a}$  の変化は制御量にまったく影響を与えない。

巡ループゲインが1となる中間周波数帯はほぼ  $[1.0, 4.0]$  であることが分る。しかし、この周波数帯付近では  $T^{-1}(j\omega) T_d(j\omega)$  の各要素の変化が急激であるため、この周波数帯の中から一つの周波数を選んで  $\theta_{4a}$  から制御量への伝達関数行列

$$N(j\omega) = T(j\omega)M + T_d(j\omega) \quad (92)$$

の各要素を小さくしても、その付近の周波数で  $N(j\omega)$  の要素を小さくできるとは期待できない。そこで、 $T^{-1}(j\omega) T_d(j\omega)$  の要素の変化が少なく中間周波数帯に近い点を選び  $\omega_0 = 0.2$  として2.8の方法でフィードフォワード補償要素  $M$  を定めることにする。この結果  $M$  として、

$$M = (0.96, -0.71, 0.97, 0.85)^T \quad (93)$$

が得られた。このフィードフォワード補償を施した系で  $\theta_{4a}$  が  $11.3\%$  ステップ状に変化したときの制御量の応答を図. 20 に示した。図. 17 の応答と比べると温度  $\theta_{3a}$ 、 $\theta_{4a}$ 、圧力  $P_{4a}$  の変動の最高値がフィードフォワード補償によって小さくなっていることが分る。また、圧力  $P_{4a}$  の整定時間も著しく改善されている。

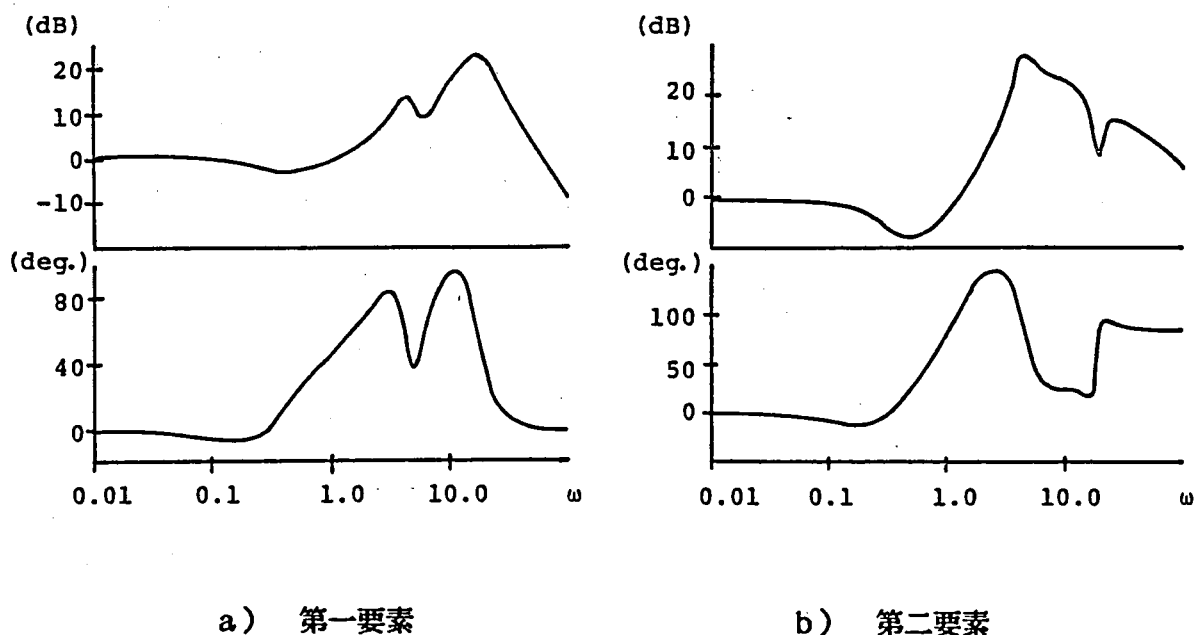
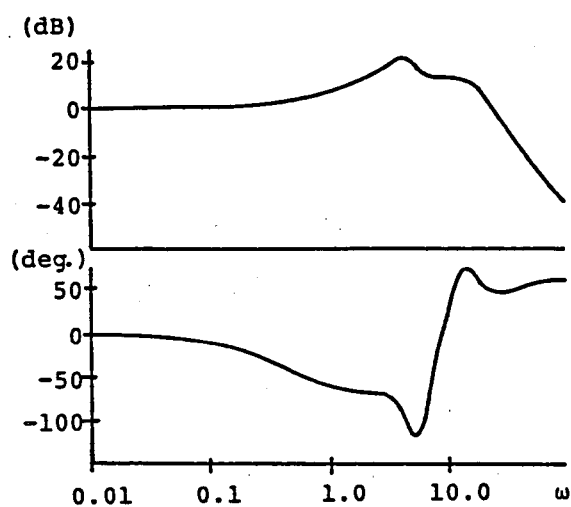
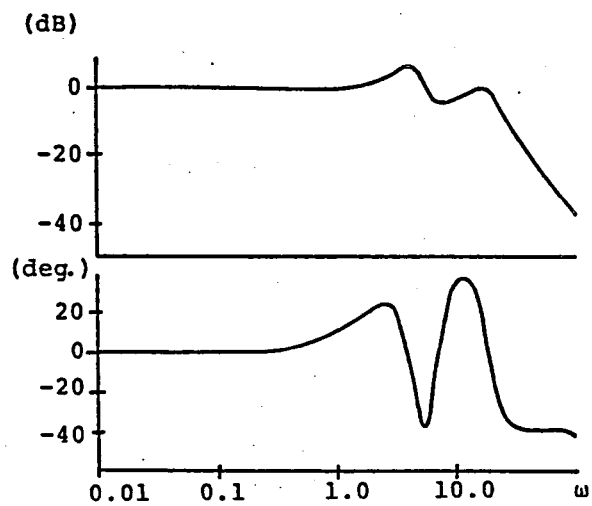


図. 19  $T^{-1}(s) T_d(s)$  の各要素のボード線図



c) 第三要素



d) 第四要素

図. 19  $T^{-1}(s)$   $T_d(s)$  の各要素のボード線図 (続き)

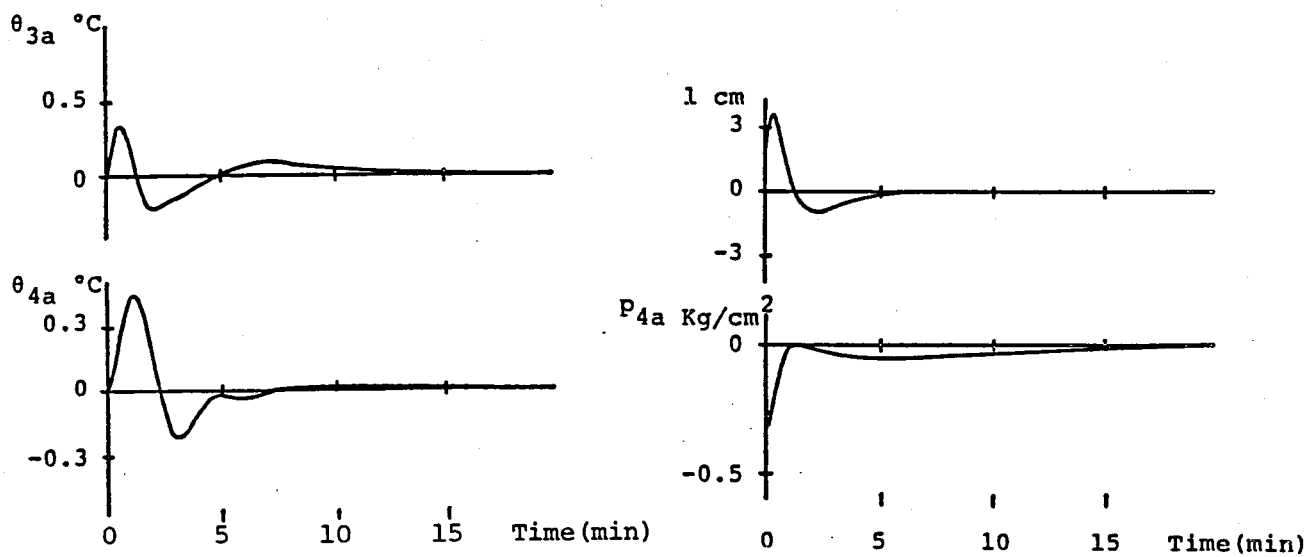


図. 20 フィードフォワード補償を施した制御系の応答

## 第 3 章

### 多変数多周期サンプル値系についての 基礎理論

#### 3. 1 多変数多周期サンプル値制御系 の説明と記号

図. 1 に示した多変数多周期サンプル値閉ループ系を考える。制御対象  $S$  は  $p$  個の操作量  $w_1, w_2, \dots, w_p$  と  $p$  個の制御量  $y_1, y_2, \dots, y_p$  をもつ。制御対象  $S$  は次の状態方程式で表わされるものとする。

$$\underline{x} = A \underline{x} + B \underline{w} \quad (1)$$

$$\underline{y} = C \underline{x} \quad (2)$$

ここで、 $\underline{x}$  は  $n_0$  次の状態ベクトルである。 $\underline{w}, \underline{y}$  は

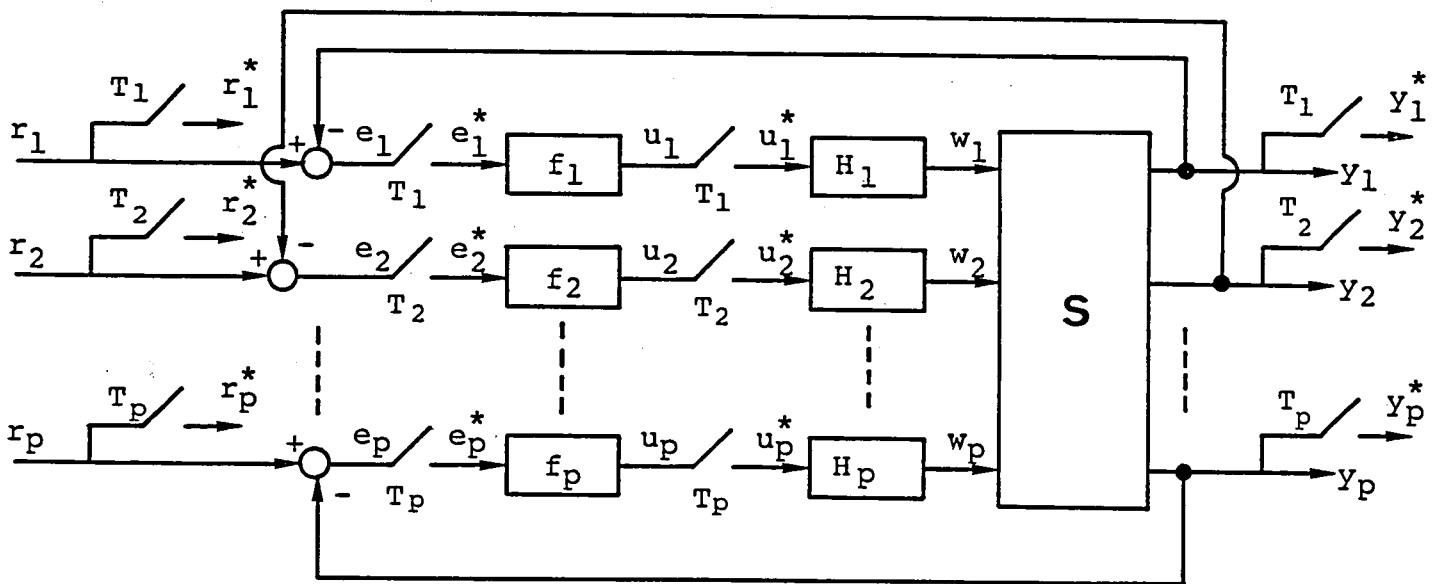


図. 1 多変数多周期サンプル値制御系

$$\underline{w} = (w_1, w_2, \dots, w_p)^T \quad (3)$$

$$\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_p)^T \quad (4)$$

である。A, B, C は、それぞれ  $n_0 \times n_0$ ,  $n_0 \times p$ ,  $p \times n_0$  の定数行列である。行列 B の第 i 列を  $b_i$ 、C の第 i 行を  $c_i^T$  で表わす。すなわち、

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_p) \quad (5)$$

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_p)^T \quad (6)$$

である。t = kT での  $\underline{x}(t)$  の値  $\underline{x}(kT)$  を初期値としたとき  $\underline{x}(t)$  は、

$$\underline{x}(t) = e^{A(t-kT)} \underline{x}(kT) + \int_{kT}^t e^{A(t-\tau)} B \underline{w}(\tau) d\tau \quad (7)$$

で与えられる。制御対象 S の伝達関数行列  $G(s)$  は、

$$G(s) = C[sI - A]^{-1} B \quad (8)$$

で与えられる。第 i 番目の出力  $y_i$  はサンプリング周期  $T_i$  のデジタルコントローラと零次ホールド回路を通して第 i 番目の入力にフィードバックされる。ホールド回路の伝達関数  $h_i(s)$  は、

$$h_i(s) = (1 - e^{-sT_i}) / s \quad (9)$$

で与えられる。ホールド回路を含めた制御対象の伝達関数行列を  $Q(s)$  とすれば  $Q(s)$  は

$$Q(s) = G(s) \text{diag} (h_1(s), h_2(s), \dots, h_p(s)) \quad (10)$$

となる。

サンプリングは各ループとも  $t = 0$  で同時に開始するものとする。また、各ループのサンプリング周期の比が有理数になると仮定する。したがって、それぞれのサンプリング周期  $T_i$  はある周期  $T_0$  を用いて、

$$T_i = T_0 / N_i \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (11)$$

と表わされる。ここで、 $N_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) は最大公約数が 1 の正整数である。

サンプリング周期に関する記号を次のように定める。

$$N_0 \quad ; \quad N_1, N_2, \dots, N_p \text{ の最小公倍数} \quad (12)$$

$$N = N_1 + N_2 + \dots + N_p \quad (13)$$

$$\tau_0 = T_0 / N_0 \quad , \quad l_i = N_0 / N_i \quad (14)$$

$$\omega_0 = 2\pi / T_0 \quad , \quad \omega_i = 2\pi / T_i \quad (15)$$

それぞれの記号の間には、

$$T_i = l_i \tau_0 \quad (16)$$

$$\omega_i = N_i \omega_0 \quad , \quad 2\pi / \tau_0 = N_0 \omega_0 \quad (17)$$

の関係がある。

図. 1 の  $r_i^*(t)$ ,  $e_i^*(t)$ ,  $u_i^*(t)$ ,  $y_i^*(t)$  は、それぞれ  $r_i(t)$ ,  $e_i(t)$ ,  $u_i(t)$ ,  $y_i(t)$  を時刻  $kT_i$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) でサンプルして得られるパルス列を表わす。サンプリングされた信号  $y_i^*(t)$  は、

$$y_i^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_i(kT_i) \delta(t - kT_i) \quad (18)$$

で与えられる。 $\delta(\cdot)$  はデルタ関数である。 $y^*(t)$  を

$$y^*(t) = (y_1^*(t), y_2^*(t), \dots, y_p^*(t))^T \quad (19)$$

とおく。 $r^*(t)$ ,  $e^*(t)$ ,  $u^*(t)$  も同様である。

制御対象  $S$  への入力  $w_i(t)$  は  $kT_i < t \leq (k+1)T_i$  の間一定値に保たれる。すなわち、

$$w_i(t) = u_i(kT_i) \quad kT_i < t \leq (k+1)T_i \quad (20)$$

図. 2 に  $p=2$ ,  $N_1=3$ ,  $N_2=2$  の場合のサンブラとホールド回路の働きを示した。

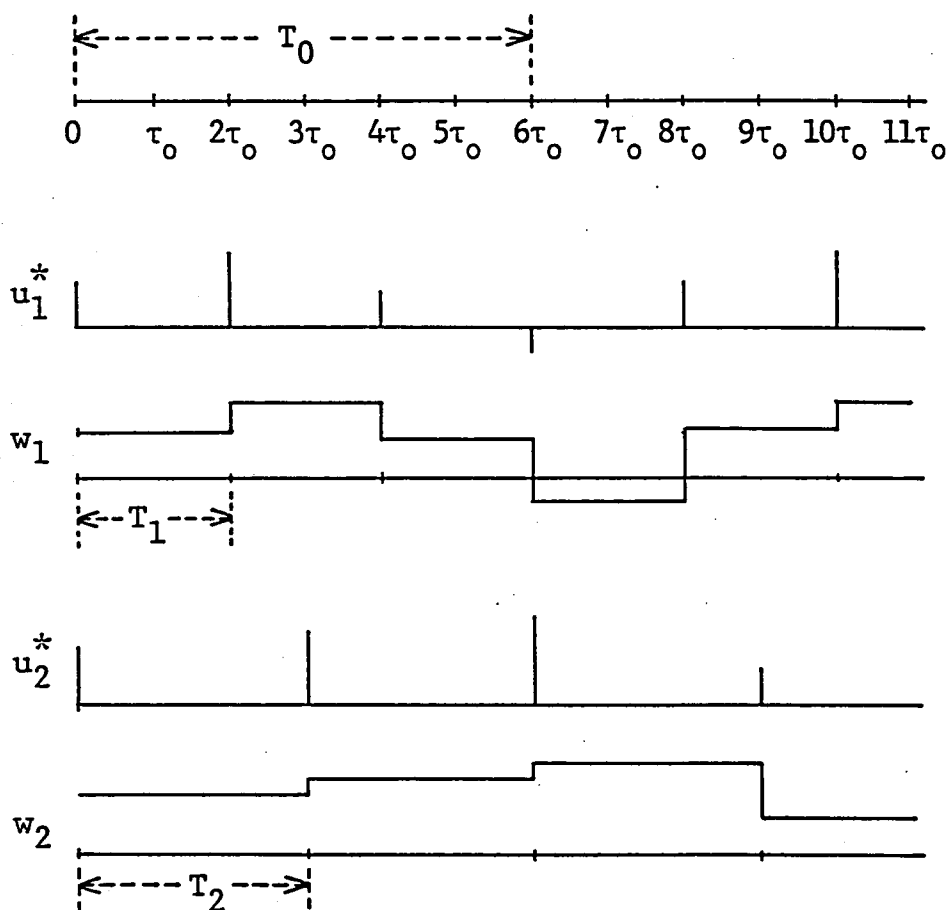


図. 2 サンブラとホールド回路の働き ( $p=2$ ,  $N_1=3$ ,  $N_2=2$ )



第  $i$  番目のループのディジタルコントローラのパルス伝達関数を  $f_i(z_{T_i})$  とする。ここで  $z$  の添字  $T_i$  はサンプリング周期が  $T_i$  であることを意味している。以後の章で安定性について論じる場合は簡単のため  $f_i(z_{T_i})$  を定数と仮定する。

本文では、多変数多周期サンプル値系をあつかうため、多くの記号が使われる。そのため、同じ記号を二つの異なった意味で用いる場合がある。その第一は  $j$  を虚数単位と入力や出力の要素を表わす添字の両方に用いる。第二に信号  $y(t)$  のラプラス変換を同じ文字  $y(s)$  を使って表わす。また、連続な信号とサンプル値信号を区別するためサンプル値信号には  $y_i^*(t)$ ,  $y_i^*(s)$  のように  $*$  を付ける。

ラプラス変換を  $\mathcal{L}[\cdot]$  で表わす。たとえば、(18) 式のパルス列のラプラス変換は、

$$\mathcal{L}[y_i^*(t)] = \int_0^\infty y_i^*(t) e^{-st} dt = \sum_{k=0}^\infty y_i(kT_i) e^{-skT_i} \quad (21)$$

となる。サンプリング周期  $T_i$  のときの  $z$ -変換を  $Z_{T_i}[\cdot]$  で表わす。このときの変数  $z$  を添字  $T_i$  をつけて  $z_{T_i}$  とする。たとえば、 $g(s)$  の  $z$ -変換は、

$$Z_{T_i}[g(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{Br} g(\eta) \frac{1}{1 - z_{T_i}^{-1} \exp(\eta T_i)} d\eta \quad (22)$$

で与えられる。ここで  $Br$  は Bromwich 積分路を表わす。さらに、サンプリング周期  $T_i$  のときのインパルス変調を  $S_{T_i}[\cdot]$  で表わす。たとえば、

$$\begin{aligned} S_{T_i}[g(s)] &= \frac{1}{T_i} \sum_{m=-\infty}^\infty g(s + j\omega_i m) \\ &= \left\{ Z_{T_i}[g(s)] \right\}_{z_{T_i} = e^{sT_i}} \end{aligned} \quad (23)$$

の関係がある。ただし、最後の等式は  $g(s)$  が

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s g(s) = 0 \quad (24)$$

を満すときにのみ成立する。

以下では、総和の記号  $\sum_{m=-\infty}^\infty$  を  $\sum_m$  と書く。

原始  $N_i$  乗根を  $\theta_i$  と書く。すなわち、

$$\theta_i = \exp(j2\pi / N_i) \quad (25)$$

†) (24) 式が満されていない場合は、(23) 式の右辺に  $\frac{1}{2} g(0+) = \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow \infty} s g(s)$  を付け加えなければならない。しかし、インパルス変調の対象となるほとんどの伝達関数では (24) 式が満されている。本論文では (23) 式が成立するものと仮定する。

である。本文では、 $\theta_i$  に関する次の公式をしばしば用いる。

$$\sum_{\ell=0}^{N_i-1} \theta_i^{k\ell} = \begin{cases} N_i & (k \text{ が } N_i \text{ の整数倍}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (26)$$

$n$  次の単位行列を  $I_n$  で表わす。0 は適当な大きさの零行列を表わす。

### 3. 2 離散時間実現と安定条件<sup>111)-113)</sup>

#### 1. 離散時間信号

図. 1 の離散時間実現を導く方法には、低次の状態空間を考え時変の状態方程式を得る方法と高次の状態空間を考え時不変の状態方程式を得る方法の二通りがある。<sup>53)</sup> 本文では、後者の方法を採用する。そのために、離散時間信号を次のように定義する。

サンプル値系の拡張離散時間状態ベクトル  $\underline{x}^D(k)$  を

$$\underline{x}^D(k) = \begin{bmatrix} \underline{x}_1^D(k) \\ \vdots \\ \underline{x}_{N_0-1}^D(k) \\ \underline{x}_{N_0}^D(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}((k-1)T_0 + \tau_0) \\ \vdots \\ \underline{x}((k-1)T_0 + (N_0-1)\tau_0) \\ \underline{x}(kT_0) \end{bmatrix} \quad (27)$$

で定義する。 $\underline{x}^D(k)$  は  $N_0 n_0$  次のベクトルであり、時間  $(k-1)T_0 < t \leq kT_0$  の間で周期  $\tau_0$  でサンプルして得られる状態の値を要素とする。 $\bar{N}$  次の離散時間出力ベクトル  $\underline{y}^D(k)$  を

$$\underline{y}^D(k) = \begin{bmatrix} \underline{y}_1^D(k) \\ \underline{y}_2^D(k) \\ \vdots \\ \underline{y}_p^D(k) \end{bmatrix} \quad (28)$$

で定義する。ここで、 $\underline{y}_i^D(k)$  は  $N_i$  次のベクトルで次式で与えられる。

$$y_i^D(k) = \begin{bmatrix} y_{i0}^D(k) \\ y_{i1}^D(k) \\ \vdots \\ y_{iN_i-1}^D(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i(kT_0) \\ y_i(kT_0 + T_i) \\ \vdots \\ y_i(kT_0 + \overline{N_i-1}T_i) \end{bmatrix} \quad i=1,2,\dots,p \quad (29)$$

$y_i^D(k)$ は時間  $kT_0 \leq t < \overline{k+1}T_0$  の間で第  $i$  番目の出力  $y_i(t)$  を周期  $T_i$  でサンプルして得られる値を要素とする。離散時間目標値ベクトル  $\underline{r}^D(k)$ 、離散時間誤差ベクトル  $\underline{e}^D(k)$ 、離散時間制御信号ベクトル  $\underline{u}^D(k)$  も  $y^D(k)$  と同様に定義される。ここで  $\underline{x}_l^D$  の添字  $l$  と  $y_{i\mu}^D$  の添字  $\mu$  はこれらの変数が値をとる時刻を示していること、および  $y_i^D$  と  $y_{i\mu}^D$  の添字  $i$  が出力変数  $y$  の要素の番号を表わしていることに注意されたい。これらのベクトルの要素の時間的な関係を図. 3 に示した。

## 2. 開ループ系の離散時間実現

図. 1 の  $\underline{u}^*(t)$  から  $y^*(t)$  への伝達特性を表わす状態方程式を導く。 $\underline{x}^D(k+1)$  について考えよう。(7) 式と図. 3 から  $\underline{x}^D(k+1)$  は  $\underline{x}^D(k)$  の最後のサブベクトル  $\underline{x}_{N_0}^D(k)$  と時間  $kT_0 \leq t < \overline{k+1}T_0$  の間の操作量だけで定められることが分る。さらに、操作量と制御信号には (20) 式の関係があるから、図. 3 より制御信号  $\underline{u}^D(k)$  の第  $i$  サブベクトル  $\underline{u}_i^D(k)$  の要素  $u_{i\mu}^D(k)$  は、

$$l > \mu l_i \quad (30)$$

となる拡張離散時間状態ベクトル  $\underline{x}^D(k+1)$  のサブベクトル  $\underline{x}_l^D(k+1)$  だけに影響を与えることが分る<sup>†)</sup>。このことから、次の状態遷移方程式が容易に得られる。

$$\underline{x}^D(k+1) = A^D \underline{x}^D(k) + B^D \underline{u}^D(k) \quad (31)$$

ここで、 $A^D$  は  $N_0 n_0$  次正方形行列で次式で与えられる。

---

†)  $Q(s)$  の直達分は 0 である ((1)、(10) 式参照)。したがって、 $u_{i\mu}^D(k)$  は  $\underline{x}_{\mu l_i}^D(k+1)$  に影響を与えない。

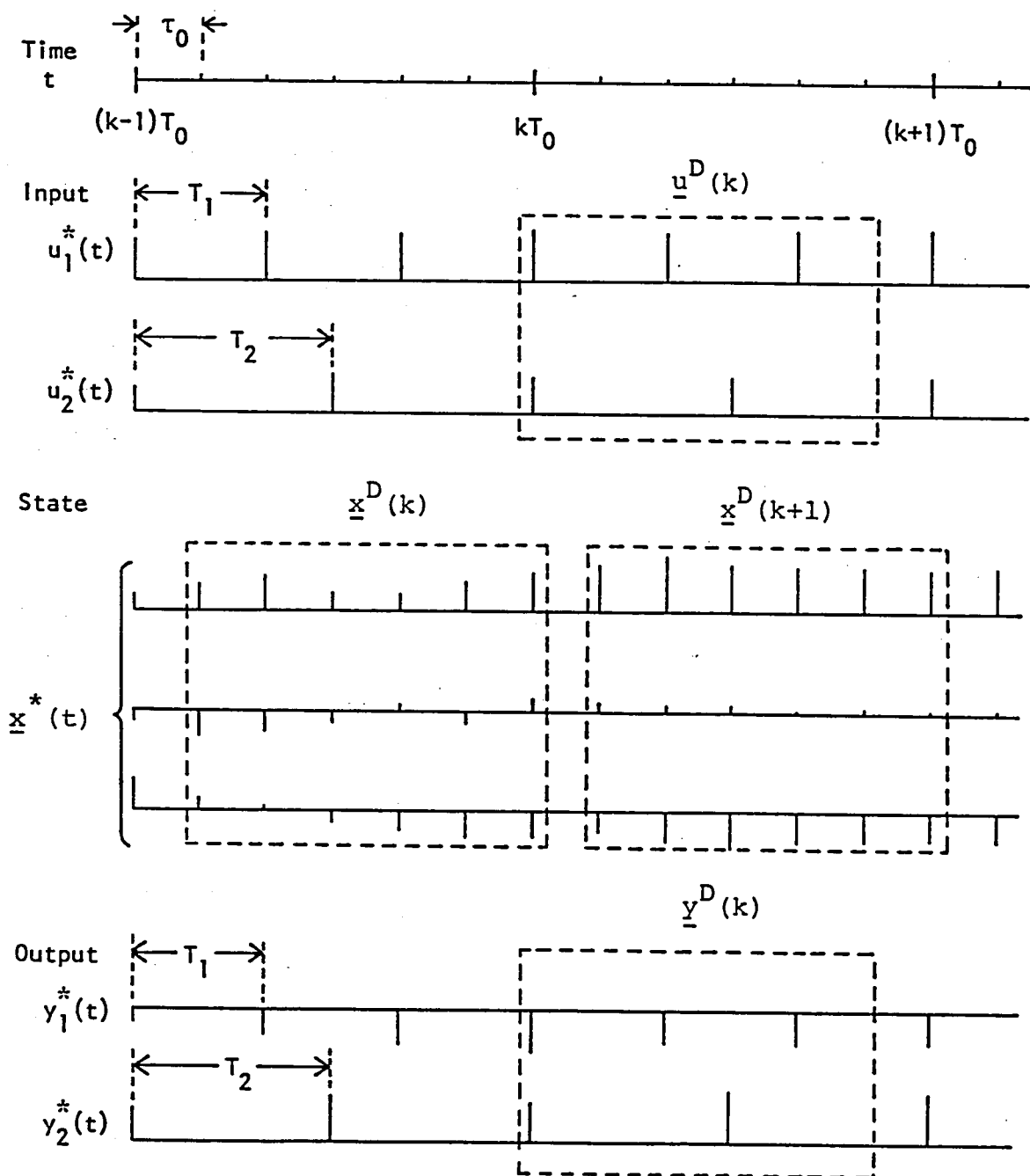


図. 3 離散時間ベクトルの要素の時間的な関係

$$A^D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & A_1^D \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_2^D \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{N_0}^D \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$A_l^D = e^{A l \tau_0} \quad l = 1, 2, \cdots, N_0 \quad (33)$$

$A^D$  は、最後の  $n_0$  個の列を除いた他の要素はすべて零である。したがって、 $A^D$  の固有値のうち  $(N_0 - 1) n_0$  個は 0 である。 $B^D$  は  $N_0 n_0 \times \bar{N}$  の行列で次式で与えられる。

$$B^D = (B_1^D, B_2^D, \cdots, B_P^D) \quad (34)$$

$$B_i^D = \begin{pmatrix} B_{1i}^D \\ B_{2i}^D \\ \vdots \\ B_{N_0 i}^D \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$B_{li}^D = (\underline{b}_{li,0}^D, \underline{b}_{li,1}^D, \cdots, \underline{b}_{li,N_i-1}^D) \quad (36)$$

$$l = 1, 2, \cdots, N_0; \quad i = 1, 2, \cdots, P$$

ここで、 $\underline{b}_{li,\mu}^D$  は  $n_0$  次のベクトルで

$$\underline{b}_{li,\mu}^D = \begin{cases} 0 & l \leq \mu l_i \\ \int_{\mu l_i \tau_0}^{l \tau_0} e^{A(l \tau_0 - \tau)} \underline{b}_i d\tau & \mu l_i < l \leq (\mu+1) l_i \\ \int_{\mu l_i \tau_0}^{(\mu+1) l_i \tau_0} e^{A(l \tau_0 - \tau)} \underline{b}_i d\tau & (\mu+1) l_i < l \end{cases} \quad (37)$$

で与えられる。 $\tilde{\underline{b}}_{i,\eta}$  を

$$\tilde{\underline{b}}_{i,\eta} = \int_0^{\eta \tau_0} e^{A(\eta \tau_0 - \tau)} \underline{b}_i d\tau \quad \eta = 1, 2, \cdots, l_i \quad (38)$$

とおけば  $l > \mu l_i$  の  $\underline{b}_{li,\mu}^D$  を次のように表わすことができる。

$$\underline{b}_{li,\mu}^D = \begin{cases} \tilde{\underline{b}}_{i,l-\mu l_i} & \mu l_i < l \leq (\mu+1) l_i \\ \exp[(l - (\mu+1) l_i) A \tau_0] \tilde{\underline{b}}_{i,l_i} & (\mu+1) l_i < l \end{cases} \quad (39)$$

出力については(2)式より、明らかに次式が成り立つ。

$$\underline{y}^D(k) = C^D \{ U_1 \underline{x}^D(k+1) + U_2 \underline{x}^D(k) \} \quad (40)$$

ここで、 $U_1$  と  $U_2$  は  $N_0 n_0$  次正方形行列でそれぞれ次式で与えられる。

$$U_1 = \text{block diag} [ I_{n_0}, I_{n_0}, \dots, I_{n_0}, 0 ] \quad (41)$$

$$U_2 = \text{block diag} [ 0, 0, \dots, 0, I_{n_0} ] \quad (42)$$

ただし、(41)、(42)式の0は  $n_0 \times n_0$  の零行列である。 $C^D$  は次式で与えられる。

$$C^D = \begin{bmatrix} C_1^D \\ C_2^D \\ \vdots \\ C_P^D \end{bmatrix}, \quad C_i^D = \begin{bmatrix} (\underline{c}_{i,0}^D)^T \\ (\underline{c}_{i,1}^D)^T \\ \vdots \\ (\underline{c}_{i,N_i-1}^D)^T \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$(\underline{c}_{i,0}^D)^T = ( \underline{0}^T, \dots, \underline{0}^T, \underline{c}_i^T ) \quad (44)$$

$$(\underline{c}_{i,\mu}^D)^T = ( \underline{0}^T, \dots, \underline{0}^T, \underset{\uparrow}{\underline{c}_i^T}, \underline{0}^T, \dots, \underline{0}^T ) \quad (45)$$

$\mu_i$  番目のサブベクトル

$$i = 1, 2, \dots, P \quad ; \quad \mu = 1, 2, \dots, N_i - 1$$

ただし、(44)、(45)式のサブベクトル  $\underline{0}^T$  は  $n_0$  次の零ベクトルである。

(31)、(40)式が開ループ系の離散時間実現である。 $P=2, N_1=3, N_2=2$  の場合の行列  $A^D, B^D, C^D$  の形を図. 4に示した。なお、図. 3あるいは図. 4より明らかのようにここで導いた離散時間実現は最小実現とはなっていない。たとえば、 $P=2, N_1=3, N_2=2$  の場合は拡張離散時間状態ベクトルのサブベクトル  $\underline{x}_1^D$  と  $\underline{x}_5^D$  は不要である。しかし、

- 1) 行列  $A^D, B^D, C^D$  の形が規則性をもつ、
- 2) 離散時間実現が最小実現でないことは、安定性の必要十分条件を導く上で妨げとならない、

ので本文では上で導いた離散時間実現を用いることにする。

### 3. 閉ループ系の離散時間実現と安定条件

図. 1の閉ループ制御系に戻ろう。ここでは、簡単のためデジタルコントローラ

$$A^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{A\tau_0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2A\tau_0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3A\tau_0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{4A\tau_0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{5A\tau_0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{6A\tau_0} \end{bmatrix}$$

$$B^D = \begin{bmatrix} \underline{B}_{1,1} & 0 & 0 & \underline{B}_{2,1} & 0 \\ \underline{B}_{1,2} & 0 & 0 & \underline{B}_{2,2} & 0 \\ e^{A\tau_0} \cdot \underline{B}_{1,2} & \underline{B}_{1,1} & 0 & \underline{B}_{2,3} & 0 \\ e^{2A\tau_0} \cdot \underline{B}_{1,2} & \underline{B}_{1,2} & 0 & e^{A\tau_0} \cdot \underline{B}_{2,3} & \underline{B}_{2,1} \\ e^{3A\tau_0} \cdot \underline{B}_{1,2} & e^{A\tau_0} \cdot \underline{B}_{1,2} & \underline{B}_{1,1} & e^{2A\tau_0} \cdot \underline{B}_{2,3} & \underline{B}_{2,2} \\ e^{4A\tau_0} \cdot \underline{B}_{1,2} & e^{2A\tau_0} \cdot \underline{B}_{1,2} & \underline{B}_{1,2} & e^{3A\tau_0} \cdot \underline{B}_{2,3} & \underline{B}_{2,3} \end{bmatrix}$$

$$C^D = \begin{bmatrix} \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{C}_1^T \\ \underline{0}^T & \underline{C}_1^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{C}_1^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{C}_2^T \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{C}_2^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{0}^T \end{bmatrix}$$

図. 4 係数行列  $A^D$ 、 $B^D$ 、 $C^D$  の構造 ( $p=2, N_1=3, N_2=2$ )

$f_i(z_{T_i})$ は定数であるとする。すなわち、

$$f_i(z_{T_i}) = f_i \quad l = 1, 2, \dots, p \quad (46)$$

閉ループ系のフィードバック則は、離散時間信号を用いて

$$u^D(k) = F^D (x^D(k) - y^D(k)) \quad (47)$$

と表わされる。ここで  $F^D$  はディジタルコントローラ  $f_i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) から作られる  $\bar{N}$  次正方行列で、次式で与えられる。

$$F^D = \text{block diag} (F_1^D, F_2^D, \dots, F_p^D) \quad (48)$$

$$F_i^D = \text{diag} (f_i, f_i, \dots, f_i) \quad (49)$$

$F_i^D$  は  $N_i$  次対角行列である。閉ループ系の離散時間信号の間には、(31)、(40)、(47) 式の関係が成り立っている。(40)、(47) 式を(31)式に代入することにより、

$$[I_{N_0 n_0} + B^D F^D C^D U_1] x^D(k+1) = [A^D - B^D F^D C^D U_2] x^D(k) + B^D F^D r^D(k) \quad (50)$$

を得る。 $B^D F^D C^D U_1$  は  $N_0 n_0$  次正方行列である。この行列を  $N_0 \times N_0$  個の  $n_0$  次正方小行列に分けたとき  $B^D F^D C^D U_1$  は対角小行列が0の下三角ブロック行列となることが次のようにして示せる。 $F^D$  は、対角行列であるから  $F^D = I_{\bar{N}}$  としても  $B^D F^D C^D U_1$  の構造は変わらないから  $F^D = I_{\bar{N}}$  とする。 $B^D$  を(34)式のように小行列に分けたとき、それぞれの小行列  $B_i^D$  は(36)、(37)式より次の構造をもつ。

$$B_i^D = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & * & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & * \\ * & * & * & \dots & * \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{---} \text{ } l\text{-番目のサブベクトル} \\ \text{---} \text{ } 2l\text{-番目のサブベクトル} \\ \text{---} \text{ } (N_i-1)l\text{-番目のサブベクトル} \\ l = 1, 2, \dots, p \end{array} \quad (51)$$

ここで、0 は  $n_0$  次ベクトルであり、\* は非零の  $n_0$  次ベクトルを表わしている。 $C^D U_1$  は、 $C^D$  を(43)式のように小行列に分けたとき

$$C^D U_1 = \begin{pmatrix} C_1^D U_1 \\ C_2^D U_1 \\ \vdots \\ C_p^D U_1 \end{pmatrix} \quad (52)$$



と書かれる。(41)、(43)、(44)、(45)式より、 $C_i^D U_1$  の第一行は0で  
その他の行は  $C_i^D$  の対応する行に等しい。すなわち、 $C_i^D U_1$  は次の構造をもつ。

$$C_i^D U_1 = \begin{bmatrix} 0^T & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & 0^T \\ 0^T & \text{---} & 0^T, (*)^T, & 0^T & \text{---} & \text{---} & 0^T \\ 0^T & \text{---} & \uparrow & 0^T, (*)^T, & 0^T & \text{---} & 0^T \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0^T & \text{---} & \uparrow & \text{---} & 0^T, (*)^T, & 0^T & 0^T \end{bmatrix} \quad (53)$$

$l_i, 2l_i, (N_i-1)l_i$  番目のサブベクトル

$i=1, 2, \dots, p$

$B^D C^D U_1$  は (43)、(52) 式より

$$B^D C^D U_1 = B_1^D C_1^D U_1 + B_2^D C_2^D U_1 + \dots + B_p^D C_p^D U_1 \quad (54)$$

と書かれる。 $B_i^D C_i^D U_1$  は  $N_0 n_0 \times N_0 n_0$  次の行列である。 $B_i^D C_i^D U_1$  を  $N_0 \times N_0$  個の  $n_0$  次正方小行列に分けたとき、(51)、(53) 式より  $B_i^D C_i^D U_1$  は対角小行列が0の下三角ブロック行列となることが容易に確かめられる。したがって、 $B^D C^D U_1$  も  $B_i^D C_i^D U_1$  と同じ構造をもち、対角小行列が0の下三角ブロック行列となる。これより、

$$\det [I_{N_0 n_0} + B^D F^D C^D U_1] = 1 \neq 0 \quad (55)$$

を得る。(50)、(55) 式より、

$$\begin{aligned} \underline{x}^D(k+1) &= [I_{N_0 n_0} + B^D F^D C^D U_1]^{-1} [A^D - B^D F^D C^D U_2] \underline{x}^D(k) \\ &\quad + [I_{N_0 n_0} + B^D F^D C^D U_1]^{-1} B^D F^D \underline{y}^D(k) \end{aligned} \quad (56)$$

が得られる。これは、(31)、(40)、(47) 式で表わされる離散時間閉ループ系の状態遷移方程式である。この離散時間閉ループ系の安定性に関しては次の通常の定理が成り立つ。

**定理. 1** (56) 式の離散時間閉ループ系が漸近安定であるための必要十分条件は次の  $N_0 n_0$  次正方行列、

$$A_c^D = [I_{N_0 n_0} + B^D F^D C^D U_1]^{-1} [A^D - B^D F^D C^D U_2] \quad (57)$$

のすべての固有値が単位円の内部に含まれることである。 ■

行列  $B^D F^D C^D U_2$  の要素は最後の  $n_0$  個の列を除いてすべて0である ((42) 式参照)。行列  $A^D$  も同じ構造を持っているから、 $A_c^D$  も同じ構造を持つことになる。すなわち、

$A_c^D$ の固有値のうち  $(N_0-1)n_0$  個は0となる。このことは、離散時間閉ループ系で0となる  $(N_0-1)n_0$  個の極がループを閉じてても変わらないことを意味している。

定理. 1は(31)、(40)、(47)式で表わされる離散時間閉ループ系の安定性について述べたものである。定理. 1の条件が図. 1のサンプル値閉ループ系が安定であるための必要十分条件となっていることが次のように示せる。まず、図. 1のサンプル値閉ループ系の安定性を次のように定義する。

定義. 1  $f_i(z_{T_i})$  ( $i=1, 2, \dots, p$ )を定数とする。このとき図. 1のサンプル値系は  $y(t)=0$ のときの  $x(t)$  が次の条件a)、b)を満たすとき漸近安定であるという。

- a) 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、 $\|x(0)\| < \delta$  ならば  $\|x(t)\| < \varepsilon$  となる  $\delta$  が存在する。
- b) 任意の初期値  $x(0)$  に対し、 $t \rightarrow \infty$  の時  $x(t) \rightarrow 0$  となる。 ■

このように安定性を定義したとき、次の定理が成り立つ。

定理. 2 図. 1のサンプル値閉ループ系が漸近安定であるための必要十分条件は、(57)式で与えられる  $A_c^D$  のすべての固有値が単位円の内部に含まれることである。 ■

【証明】 (十分性) 条件により  $k \rightarrow \infty$  のとき  $x^D(k) \rightarrow 0$  となる。 $x(kT_0 + lT_0)$  は  $x^D(k+1)$  のサブベクトルであるから  $k \rightarrow \infty$  のとき  $x(kT_0 + lT_0) \rightarrow 0$  となる。ところで、(1)式より  $kT_0 + lT_0 \leq t < kT_0 + (l+1)T_0$  では、 $\|x(t)\|$  はある定数  $C$  を用いて、

†) 離散時間系とサンプル値系の違いは、次の点にある。すなわち、サンプル値系ではサンプリング時刻の間の状態  $x(t)$  についても考えなければならない。したがって、十分性を示す必要がある。 $x^D(k)$  のサブベクトル  $x_1^D, x_2^D, \dots, x_{N_0}^D$  が、図. 1の閉ループ系の状態ベクトル  $x(t)$  をサンプルして得られるものとすれば  $x_1^D, x_2^D, \dots, x_{N_0}^D$  は

$$x_2^D = e^{AT_0} x_1^D + \int_0^{T_0} e^{A(T_0-\tau)} B F d\tau K x(k-1 T_0 + \tau_0)$$

|  
|  
|

を満たしていなければならない。この場合、拡張離散時間状態ベクトル  $x^D(k)$  は  $N_0 n_0$  次元ベクトル空間  $R^{N_0 n_0}$  のある部分空間  $R_0$  に含まれることになる。サンプル値系が安定であるためにはこの空間で離散時間系が安定であることが必要とされるだけであり、全空間  $R^{N_0 n_0}$  で離散時間系が安定であることを必ずしも必要としない。したがって、必要性も示す必要がある。

$$\|\underline{x}(t)\| < C \|\underline{x}(kT_0 + lT_0)\| \quad (58)$$

と押えられる。したがって、 $t \rightarrow \infty$  のとき  $\underline{x}(t) \rightarrow 0$  となる。

(必要性) 行列  $A_c^D$  は最後の  $n_0$  個の列を除いてすべて 0 である。したがって、 $\underline{x}_{N_0} = \underline{x}_{N_0}$  であるような二つの初期値  $\underline{x} = (\underline{x}_1^T, \underline{x}_2^T, \dots, \underline{x}_{N_0}^T)^T$  と  $\underline{z} = (\underline{z}_1^T, \underline{z}_2^T, \dots, \underline{z}_{N_0}^T)^T$  に対する  $\underline{x}^D(k)$  は  $k=1$  以後一致する。このことは、任意の初期値に対する拡張離散時間状態ベクトル  $\underline{x}^D(k)$  のサブベクトル  $\underline{x}_2^D$  と  $\underline{x}(t)$  のサンプル値  $\underline{x}(k-1T_0 + lT_0)$  が  $k=1$  以後一致するようにサンプル値系の初期値を設定することができることを意味している。したがって、サンプル値閉ループ系が安定であるためには、離散時間閉ループ系が安定でなければならない。 (証明終わり)

さて、開ループ系と閉ループ系の離散時間系の特性多項式をそれぞれ  $p_o(\lambda)$ ,  $p_c(\lambda)$  としよう。 $p_o(\lambda)$  と  $p_c(\lambda)$  は、

$$p_o(\lambda) = \det [\lambda I_{N_0 n_0} - A^D] \quad (59)$$

$$p_c(\lambda) = \det [\lambda I_{N_0 n_0} - A_c^D] \quad (60)$$

与えられる。(57) 式と (55) 式より次の関係を得る。

$$p_c(\lambda) = p_o(\lambda) \det [I_{N_0 n_0} + (\lambda I_{N_0 n_0} - A^D)^{-1} B^D F^D C^D (\lambda U_1 + U_2)] \quad (61)$$

行列式に関する等式を用いることにより、(31) 式は次のように変形される。

$$p_c(\lambda) / p_o(\lambda) = \det [I_{\bar{N}} + L(\lambda) F^D] \quad (62)$$

ここで、 $L(\lambda)$  は  $\bar{N}$  次正方行列で

$$L(\lambda) = C^D (\lambda U_1 + U_2) (\lambda I - A^D)^{-1} B^D \quad (63)$$

与えられる。(31) 式と (40) 式を時間間隔  $T_0$  の  $z$ -変換することにより、

$$\underline{y}^D(z_{T_0}) = L(z_{T_0}) \underline{u}^D(z_{T_0}) \quad (64)$$

の関係が得られる。ただし、 $\underline{y}^D(z_{T_0}) = Z_{T_0} [\underline{y}^D(k)]$ ,  $\underline{u}^D(z_{T_0}) = Z_{T_0} [\underline{u}^D(k)]$  である。すなわち、 $L(z_{T_0})$  は開ループ系の入出力特性を表わしている。

$L(z_{T_0})$  を用いた安定定理を導く。 $\pi_0$  を単位円の外側にある  $p_o(z_{T_0})$  の零点の個数としよう。(32)、(33) 式より  $p_o(z_{T_0})$  の零点のうち  $(N_0 - 1)n_0$  は原点にあり、残りの零点は  $e^{AN_0 T_0} = e^{AT_0}$  の固有値である。 $A$  の固有値 (すなわち、制御対象の極) を  $\lambda'$  とす

†)  $A$ 、 $B$  をそれぞれ  $n \times m$ 、 $m \times n$  の行列とする。このとき、一般に

$$\det [I_n + AB] = \det [I_m + BA]$$

<sup>(62)</sup>  
が成立する。

れば  $e^{AT_0}$  の固有値は  $e^{\lambda' T_0}$  で与えられる。したがって、 $\pi_0$  は右半閉平面にある  $A$  の固有値の個数（すなわち、制御対象の不安定極の個数）に等しい。 $\pi_c$  を単位円の外側にある  $p_c(z_{T_0})$  の零点の個数とする。さて、図. 5 に示した  $z_{T_0}$ -平面上の経路  $C$  を考えよう。 $C$  は単位円  $|z_{T_0}| = 1$  上の  $p_0(z_{T_0})$ ,  $p_c(z_{T_0})$  の零点と  $\det[I_N + L(z_{T_0})F^D]$  の零点と極を避け

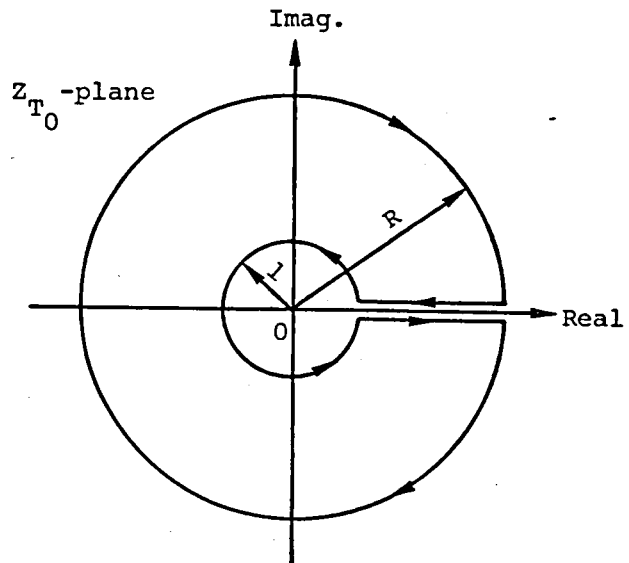


図. 5  $z_{T_0}$ -平面上の経路  $C$

るように内側にくぼませる。また、単位円の外側にある  $p_0(z_{T_0})$ ,  $p_c(z_{T_0})$  の有限な零点と  $\det[I_N + L(z_{T_0})F^D]$  の有限な零点と極がすべて  $C$  の内部に含まれるように  $R$  を十分大きく選ぶ。 $w = \det[I_N + L(z_{T_0})F^D]$  による  $C$  の  $w$ -平面における像を  $\Gamma$  とし、 $\Gamma$  が時計方向に原点を回る回数を  $\pi_L$  とする。このとき、(62) 式と偏角の原理により次の関係が得られる。

$$\pi_L = \pi_c - \pi_0 \quad (65)$$

定理. 2 により、図. 1 のサンプル値系が安定であるための必要十分条件は、

$$\pi_c = 0 \quad (66)$$

であるから、次の定理が得られる。

定理. 3 図. 1 のサンプル値閉ループ系が漸近安定であるための必要十分条件は、

$$\pi_L = -\pi_0 \quad (67)$$

が成り立つことである。

■

### 3. 3 多変数多周期インパルス変調 <sup>111), 112), 114)</sup>

#### 1. 分解表現ベクトル

いくつかの、異なったサンプリング周期をもつサンプル値信号をあつかうためにここで

はそれぞれのサンプル値信号をサンプリング周期  $T_0$  をもつ  $N_i$  個のパルス列に分解する。このようにサンプル値信号を分ける方法は既に、Kranc 42), 43) によって行なわれており、Switch-decomposition法として知られている。しかし、ここで採用する分解方法とKrancの分解方法では、分解されたパルス列の生起時刻が異なるという違いがある。

第  $i$  出力  $y_i(t)$  をサンプリング周期  $T_i$  のサンブラでサンプリングして得られるパルス列  $y_i^*(t)$  を考えよう (図. 6 a) )。このサンプル値信号に対して第  $\mu$  サンプル値成分  $y_{i\mu}^*(t)$  を、

$$y_{i\mu}^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_i(kT_0 + \mu T_i) \delta(t - kT_0 - \mu T_i) \quad \mu = 0, 1, \dots, N_i - 1 \quad (68)$$

で定義する。 $y_{i\mu}^*(t)$  のラプラス変換  $y_{i\mu}^*(s)$  は、

$$y_{i\mu}^*(s) = \frac{1}{T_0} \sum_m y_i(s + j\omega_0 m) \theta_i^{\mu m} \quad (69)$$

で与えられる。 $N_i=3$  の場合の  $y_i^*(t)$  と  $y_{i\mu}^*(t)$  の関係を図. 6 b) に示した。明らかに、

$$y_i^*(t) = \sum_{\mu=0}^{N_i-1} y_{i\mu}^*(t) \quad (70)$$

$$y_i^*(s) = \sum_{\mu=0}^{N_i-1} y_{i\mu}^*(s) = \frac{1}{T_0} \sum_{\mu=0}^{N_i-1} \sum_m y_i(s + j\omega_0 m) \theta_i^{\mu m} \quad (71)$$

が成立する。 $y_i^*(t)$  の分解表現ベクトル  $\underline{y}_i^{\text{DEV}}(t)$  を、

$$\underline{y}_i^{\text{DEV}}(t) = (y_{i0}^*(t), y_{i1}^*(t), \dots, y_{iN_i-1}^*(t))^T \quad (72)$$

で定義する。他のサンプル値信号  $y_i^*(t)$ ,  $e_i^*(t)$ ,  $u_i^*(t)$  に対しても、サンプル値成分と分解表現ベクトルを同様に定義する。

## 2. 伝達関数の多周期インパルス変調

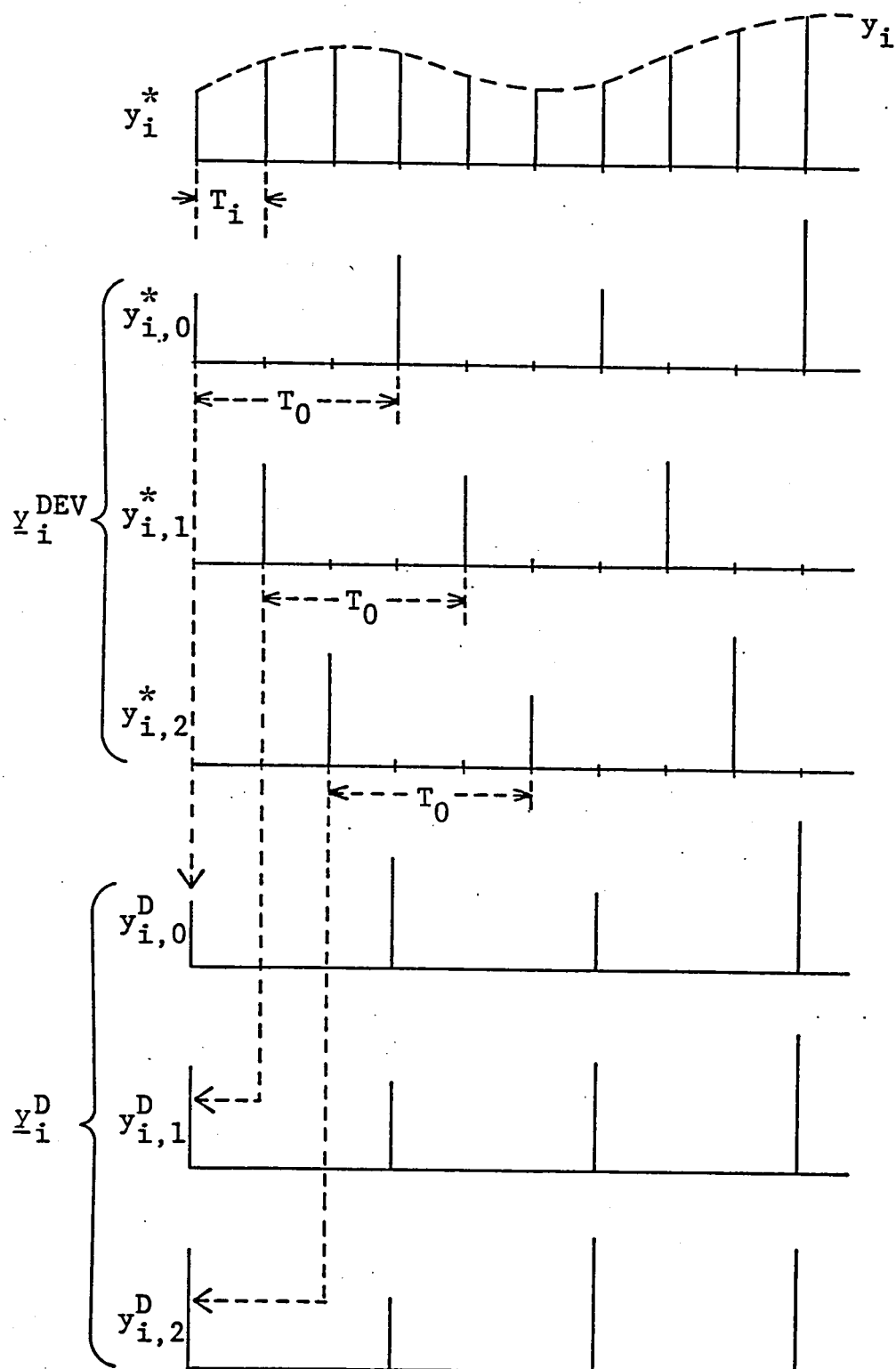
伝達関数行列  $Q(s) = (g_{ij}(s))$  の  $(i, j)$  要素  $g_{ij}(s)$  を伝達関数にもつ一入力一出力の多周期サンプル値系を考える (図. 7 a) )。この系の入出力関係を分解表現ベクトル  $\underline{u}_j^{\text{DEV}}$  と  $\underline{y}_i^{\text{DEV}}$  によって表現しよう。

連続な出力  $y_i(t)$  のラプラス変換  $y_i(s)$  は次式で与えられる。

$$y_i(s) = g_{ij}(s) u_j^*(s) \quad (73)$$

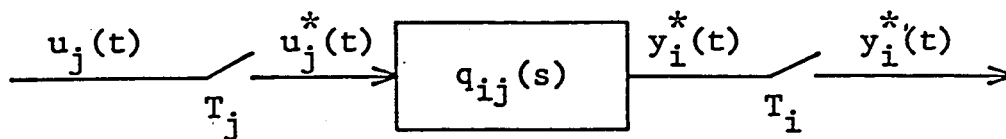
$$\begin{array}{ccc} y_i(t) & \xrightarrow{\quad} & y_i^*(t) \\ y_i(s) & \xrightarrow[\frac{T_0}{N_i}]{} & y_i^*(s) \end{array}$$

a) 多周期サンブラ

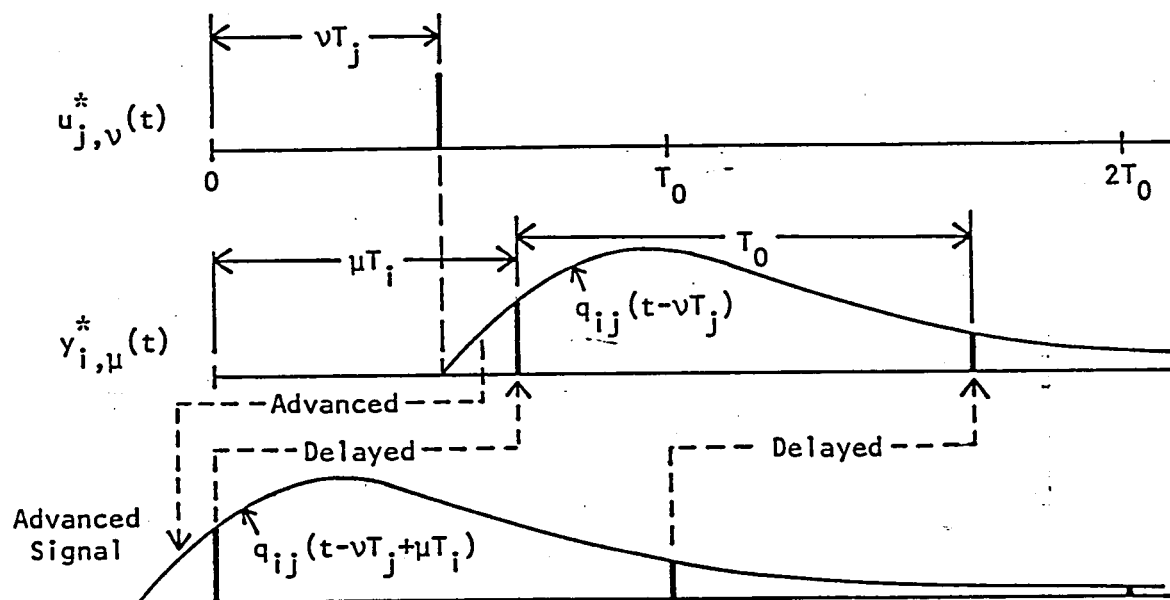


b)  $y_i^{\text{DEV}}(t)$  と  $y_i^{\text{D}}(t)$  の関係 ( $N_i = 3$ )

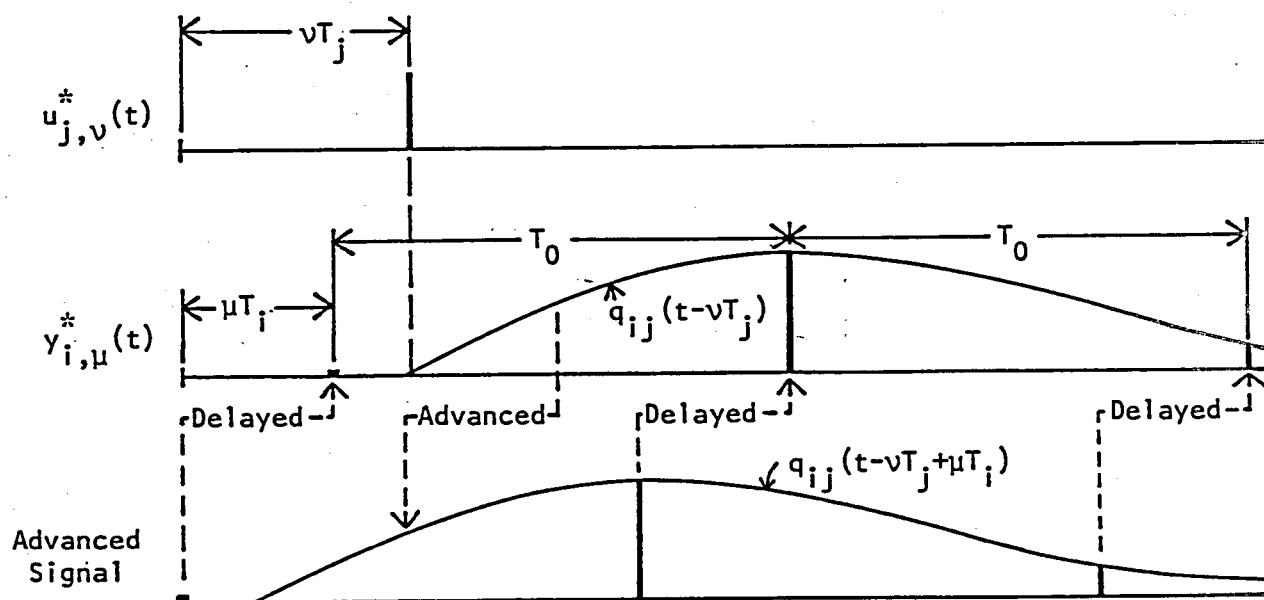
図. 6 多周期サンブラと  $y_i^{\text{DEV}}(t)$  と  $y_i^{\text{D}}(t)$  の関係



a) ブロック線図



(b)  $\mu T_i > \nu T_j$



(c)  $\mu T_i < \nu T_j$

図. 7 一入力出力多周期サンプル値系

(69) 式を  $y_{i\mu}^*(s)$  に適用し、(71) 式を  $u_j^*(s)$  に適用すれば (73) 式より、

$$y_{i\mu}^*(s) = \frac{1}{T_0} \sum_m g_{ij}(s + j\omega_0 m) \theta_i^{\mu m} \quad (74)$$

$$\times \left\{ \frac{1}{T_0} \sum_{v=0}^{N_j-1} \sum_n u_j(s + j\omega_0 \overline{m+n}) \theta_j^{vn} \right\}$$

が得られる。ここで、一般に任意の  $m$  に対して、

$$\frac{1}{T_0} \sum_n u_j(s + j\omega_0 \overline{m+n}) \theta_j^{vn} = u_{jv}^*(s) \theta_j^{-vm} \quad (75)$$

が成立することを考慮すれば、(74) 式は

$$y_{i\mu}^*(s) = \sum_{v=0}^{N_j-1} \left\{ \frac{1}{T_0} \sum_m g_{ij}(s + j\omega_0 m) \theta_i^{\mu m} \theta_j^{-vm} \right\} u_{jv}^*(s) \quad (76)$$

と変形される。

ここで、 $N_i \times N_j$  の行列  $Q_{ij}^{MIM}(s)$  を

$$Q_{ij}^{MIM}(s) = (g_{ij,\mu\nu}^{MIM}(s)) \quad \begin{array}{l} \mu = 0, 1, \dots, N_i-1 \\ \nu = 0, 1, \dots, N_j-1 \end{array} \quad (77)$$

$$g_{ij,\mu\nu}^{MIM}(s) = \frac{1}{T_0} \sum_m g_{ij}(s + j\omega_0 m) \theta_i^{\mu m} \theta_j^{-vm} \quad (78)$$

で定義する。 $Q_{ij}^{MIM}(s)$  を用いれば、 $\underline{u}_j^{DEV}(s)$  と  $\underline{y}_i^{DEV}(s)$  の関係は、(76) 式より

$$\underline{y}_i^{DEV}(s) = Q_{ij}^{MIM}(s) \underline{u}_j^{DEV}(s) \quad (79)$$

と表わされる。 $Q_{ij}^{MIM}(s)$  を伝達関数  $g_{ij}(s)$  の多周期インパルス変調と呼ぶことにする。

### 3. 多周期インパルス変調による多変数系の記述

図. 1 の多変数多周期サンプル値系に戻る。前節の多周期インパルス変調による入出力関係の表現方法は多変数系に容易に拡張できる。サンプル値出力ベクトル  $\underline{y}^*(t)$  に対し分解表現ベクトル  $\underline{y}^{DEV}(t)$  を、

$$\underline{y}^{DEV}(t) = \begin{bmatrix} y_1^{DEV}(t) \\ y_2^{DEV}(t) \\ \vdots \\ y_p^{DEV}(t) \end{bmatrix} \quad (80)$$



で定義する。サンプル値目標値、誤差、制御信号ベクトルに対してもそれぞれ分解表現ベクトル  $\underline{y}^{\text{DEV}}$ 、 $\underline{e}^{\text{DEV}}$ 、 $\underline{u}^{\text{DEV}}$  を同様に定義する。さらに、伝達関数行列  $Q(s)$  の多周期インパルス変調  $Q^{\text{MIM}}(s)$  を

$$Q^{\text{MIM}}(s) = \begin{bmatrix} Q_{11}^{\text{MIM}}(s) & Q_{12}^{\text{MIM}}(s) & \cdots & Q_{1p}^{\text{MIM}}(s) \\ Q_{21}^{\text{MIM}}(s) & Q_{22}^{\text{MIM}}(s) & \cdots & Q_{2p}^{\text{MIM}}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{p1}^{\text{MIM}}(s) & Q_{p2}^{\text{MIM}}(s) & \cdots & Q_{pp}^{\text{MIM}}(s) \end{bmatrix} \quad (81)$$

で定義する。 $Q^{\text{MIM}}(s)$  は  $N$  次正方行列である。 $Q_{ij}^{\text{MIM}}(s)$  は伝達関数  $g_{ij}(s)$  の多周期インパルス変調である ( $i, j = 1, 2, \dots, p$ )。

ディジタルコントローラ  $f_i(z_{T_i})$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) の多周期インパルス変調は次のようにして得られる。サンプリング周期  $T_i$  のときの  $z$ -変換が  $f_i(z_{T_i})$  となる伝達関数  $f_i(s)$  を考える。すなわち、

$$f_i(z_{T_i}) = Z_{T_i} [f_i(s)] \quad (82)$$

$f_i(s)$  の多周期インパルス変調を  $F_i^{\text{MIM}}(s)$  とすれば、ディジタルコントローラの多周期インパルス変調  $F^{\text{MIM}}(s)$  は、

$$F^{\text{MIM}}(s) = \text{block diag} (F_1^{\text{MIM}}(s), F_2^{\text{MIM}}(s), \dots, F_p^{\text{MIM}}(s)) \quad (83)$$

で与えられる。明らかに図. 1 の多変数多周期サンプル値系は分解表現ベクトルによって

$$\underline{y}^{\text{DEV}}(s) = Q^{\text{MIM}}(s) \underline{u}^{\text{DEV}}(s) \quad (84)$$

$$\underline{e}^{\text{DEV}}(s) = \underline{r}^{\text{DEV}}(s) - \underline{y}^{\text{DEV}}(s) \quad (85)$$

$$\underline{u}^{\text{DEV}}(s) = F^{\text{MIM}}(s) \underline{e}^{\text{DEV}}(s) \quad (86)$$

と記述される。

#### 4. 多周期インパルス変調の性質

(78) 式で与えられる多周期インパルス変調の要素  $g_{ij,\mu\nu}^{\text{MIM}}(s)$  は (11) 式の関係を用いて、

$$g_{ij,\mu\nu}^{\text{MIM}}(s) = \frac{1}{T_0} \sum_m g_{ij}(s + j\omega_0 m) \exp[(\mu T_i - \nu T_j)(s + j\omega_0 m)] \\ \times \exp[-(\mu T_i - \nu T_j)s] \quad (87)$$

と書き直される。さらに、(23)式の関係を活用すれば(普通の)インパルス変調を用いて、

$$g_{ij,\mu\nu}^{MIM}(s) = e^{-(\mu T_i - \nu T_j)s} S_{T_0} [g_{ij}(s) e^{(\mu T_i - \nu T_j)s}] \quad (88)$$

と書かれる。このことは、次のように解釈することができる(図. 7b)、c)参照)。  
図. 7a) の系に入力として単位インパルス $\delta(t - \nu T_j)$ を加える。この入力インパルスは入力の第 $\nu$ サンプル値成分となる。 $g_{ij}(s)$ のインパルス応答を $g_{ij}(t)$ とすれば、この入力に対する応答は $g_{ij}(t - \nu T_j)$ である。出力の第 $\mu$ サンプル値成分 $y_{i\mu}^*(t)$ はこの応答を時刻 $kT_0 + \mu T_i$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ )でサンプリングして得られるパルス列である。ところで、 $g_{ij,\mu\nu}^{MIM}(s)$ は $\delta(t - \nu T_j)$ から $y_{i\mu}^*(t)$ への伝達関数であるから、

$$g_{ij,\mu\nu}^{MIM}(s) = \mathcal{L}[y_{i\mu}^*(t)] / e^{-\nu T_j s} \quad (89)$$

で与えられる。 $\mathcal{L}[y_{i\mu}^*(t)]$ は、次の手順で計算される。まず、連続な出力 $g_{ij}(t - \nu T_j)$ を $\mu T_i$ だけ進ませる。これにより、 $g_{ij}(t - \nu T_j + \mu T_i)$ が得られる。次にこれを時刻 $kT_0$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ )でサンプリングする。これにより、 $S_{T_0}[g_{ij}(s) e^{(\mu T_i - \nu T_j)s}]$ が得られる。最後にこのサンプルされた信号を時間 $\mu T_i$ だけ遅らせる。このようにして、 $\mathcal{L}[y_{i\mu}^*(t)] = e^{-\mu T_i s} S_{T_0}[g_{ij}(s) e^{(\mu T_i - \nu T_j)s}]$ を得る。この最後の式を(89)式に代入すれば、(88)式が得られる。

$Q^{MIM}(s)$ の対角ブロック行列 $Q_{ii}^{MIM}(s)$ について考える。(78)式より、 $i=j$ の場合、 $g_{ii,\mu\nu}^{MIM}(s)$ は添字 $\mu$ と $\nu$ の差だけに依存し、

$$\mu - \nu = \mu' - \nu', \quad \mu - \nu = N_i + \mu' - \nu' \quad (90)$$

のいずれかを満す $(\mu, \nu)$ と $(\mu', \nu')$ に対して、

$$g_{ii,\mu\nu}^{MIM}(s) = g_{ii,\mu'\nu'}^{MIM}(s) \quad (91)$$

となることが容易に示せる。このことは $Q_{ii}^{MIM}(s)$ が巡回行列となることを意味している。

すなわち、 $Q_{ii}^{MIM}(s)$ は次のような構造をもっている。

$$Q_{ii}^{MIM}(s) = \begin{bmatrix} g_{ii,00} & g_{ii,N_i-10} & g_{ii,N_i-20} & \dots & g_{ii,10} \\ g_{ii,10} & g_{ii,00} & g_{ii,N_i-10} & \dots & g_{ii,20} \\ g_{ii,20} & g_{ii,10} & g_{ii,00} & \dots & g_{ii,30} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{ii,N_i-10} & g_{ii,N_i-20} & g_{ii,N_i-30} & \dots & g_{ii,00} \end{bmatrix} \quad (92)$$

また、この対角要素はサンプリング周期  $T_0$  のときの  $g_{ii}(s)$  のインパルス変調となっている。すなわち、

$$g_{ii,00}^{MIM}(s) = S_{T_0} [g_{ii}(s)] \quad (93)$$

$N_{ij}$  を  $N_i$  と  $N_j$  の最小公倍数としよう。このとき、(78) 式および整数  $n$  に対して  $\theta_i^{nN_i} = 1$  となることから、 $g_{ij,\mu\nu}^{MIM}(s)$  が周期  $jN_{ij}\omega_0$  をもつことが容易に分る。すなわち、 $Q_{ij}^{MIM}(s)$  は周期  $jN_{ij}\omega_0$  をもつ。ところで  $N_0$  は  $N_1, N_2, \dots, N_p$  の最小公倍数であるから  $Q^{MIM}(s)$  は周期  $jN_0\omega_0$  をもつことになる。

## 5. 多周期インパルス変調を用いた安定条件

(29) 式の離散時間ベクトル  $\underline{y}_i^D(k)$  をパルス列とみなせば、(72) 式の分解表現ベクトル  $\underline{y}_i^{DEV}(t)$  と  $\underline{y}_i^D(k)$  は同じパルス列  $\underline{y}_i^*(t)$  を表わしていることが分る。しかし、 $\underline{y}_i^{DEV}(t)$  と  $\underline{y}_i^D(k)$  では各要素のパルス列の生起時刻が異なっている。すなわち、 $\underline{y}_i^D(k)$  のパルス間隔を  $T_0$  としたときの  $z$ -変換  $\underline{y}_i^D(z_{T_0})$  の各要素は時刻  $kT_0$  で同時に生起するパルス列を表わしている。これに対し、 $\underline{y}_i^{DEV}(t)$  の第  $(\mu+1)$  要素は時刻  $kT_0 + \mu T_i$  で生起するパルス列であるから、そのラプラス変換  $\underline{y}_i^{DEV}(s)$  の第  $(\mu+1)$  要素は時刻  $kT_0 + \mu T_i$  で生起するパルス列を表わしている ( $k=0, 1, 2, \dots$ )。  $N_i=3$  の場合の  $\underline{y}_i^{DEV}(t)$  と  $\underline{y}_i^D(k)$  の関係を図. 6 に示した。以上のことから、次の関係が得られる。

$$\underline{y}_i^{DEV}(s) = D_i(s) \{ \underline{y}_i^D(z_{T_0}) \} z_{T_0} = e^{sT_0} \quad (94)$$

ここで  $D_i(s)$  は次式で与えられる  $N_i$  次対角行列である。

$$D_i(s) = \text{diag} (1, e^{-sT_i}, e^{-2sT_i}, \dots, e^{-(N_i-1)sT_i}) \quad (95)$$

したがって、分解表現ベクトル  $\underline{y}_i^{DEV}(t)$  と離散時間ベクトル  $\underline{y}_i^D(k)$  の間には次の関係がある。

$$\underline{y}_i^{DEV}(s) = D(s) \{ \underline{y}_i^D(z_{T_0}) \} z_{T_0} = e^{sT_0} \quad (96)$$

ただし、

$$D(s) = \text{block diag} (D_1(s), D_2(s), \dots, D_p(s)) \quad (97)$$

同様の関係は目標値、誤差、制御信号に対しても成り立つ。

さて、ディジタルコントローラ  $f_i(z_{T_i})$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) を定数としよう。(89)  
 式の関係をも (64) 式に代入して (84) 式と比較すれば、

$$Q^{MIM}(s) = D(s) L(e^{sT_0}) D^{-1}(s) \quad (98)$$

を得る。また、ディジタルコントローラが定数であるから、

$$F^{MIM} = D(s) F^D D^{-1}(s) = F^D \quad (99)$$

となる。したがって、

$$\det [I_N + Q^{MIM}(s) F^{MIM}] = \det [I_N + L(e^{sT_0}) F^D] \quad (100)$$

が成立する。

$v(s)$  を周期  $j\alpha$  をもつ複素関数とする。ナイキストの路上で周波数  $\omega$  を  $-\alpha/2$  から  $+\alpha/2$  まで動かしたときの  $v(j\omega)$  の軌跡を  $v(s)$  の  $\alpha$ -ナイキスト軌跡と呼ぶことにする。ただし、 $v(s)$  が虚軸上に極をもつ場合はこの極を避けてナイキストの路を左半平面側にくぼませるものとする。

さて、 $\det [I_N + Q^{MIM}(s) F^{MIM}]$  の  $N_0 \omega_0$ -ナイキスト軌跡が原点を時計方向に回る回数を  $\pi_{MIM}$  としよう。このとき、(100) 式と、 $\omega$  が  $-N_0 \omega_0/2$  から  $N_0 \omega_0/2$  まで変えたとき  $e^{j\omega T_0}$  が単位円を  $N_0$  回まわることから、

$$\pi_{MIM} = N_0 \pi_L \quad (101)$$

となる。したがって、定理 3 より次の定理が得られる。

**定理 4** 図 1 のサンプル値閉ループ系が漸近安定であるための必要十分条件は、

$$\pi_{MIM} = -N_0 \pi_0 \quad (102)$$

が成り立つことである。

**注 1** <sup>42), 43)</sup> Switch-decomposition法との関連について；図 6 a) のサンプラは、同期した  $N_i$  個のサンプリング周期  $T_i$  のサンプラと時間進み、時間遅れ要素からなる系に等価

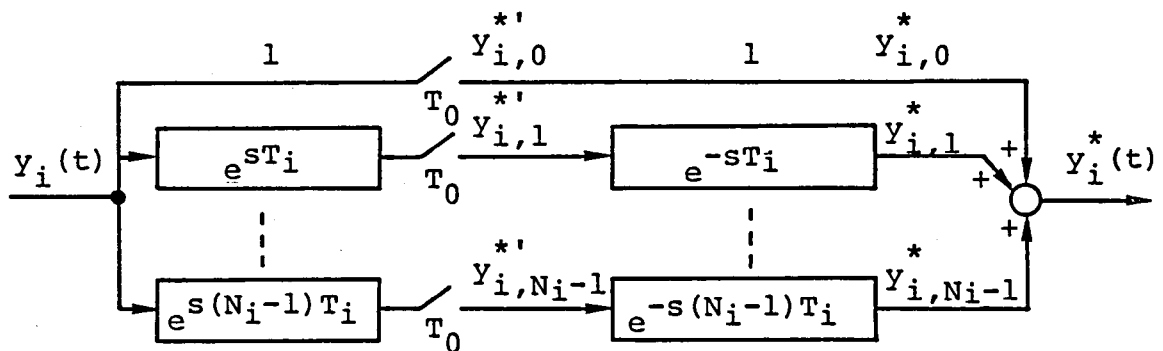


図 8 Switch-decomposition法による多周期サンプラの等価変換

変換できる。これを、図. 8に示した。このとき、出力パルス列  $y_i^*(t)$  を表現する方法として次の二通りが考えられる。1) サンプリングされた直後のパルス列  $y_{i0}^*(t), y_{i1}^*(t), \dots, y_{iN_i-1}^*(t)$  に着目する。2) 時間遅れ要素を通した後のパルス列  $y_{i0}^*(t), y_{i1}^*(t), \dots, y_{iN_i-1}^*(t)$  に着目する。前者の方法がSwitch-decomposition法である。前節で導入した離散時間ベクトル  $\underline{y}_i^D(k)$  は1)の方法、すなわち、Switch-decomposition法によるパルス列の表現方法となっている。これに対し分解表現ベクトル  $\underline{y}_i^{\text{DEV}}(t)$  は2)の方法でパルス列  $y_i^*(t)$  を表現したものとなっている。 $y_{i\mu}^*(t)$  は  $y_{i\mu}^*(t)$  に比べパルスが生起する時刻が  $\mu T_i$  だけ遅れている ( $\mu = 0, 1, \dots, N_i-1$ )。この関係を示したのが (96) 式である。

### 3. 4 対称座標表現と一般化ゲルシュゴリ ン帯<sup>(111), (114), (115)</sup>

#### 1. 対称座標分解表現ベクトル

前節で多周期インパルス変調  $Q^{\text{MIM}}(s)$  の対角ブロック行列が巡回行列となることを示した。このことは、このブロック行列が対称座標変換によって対角化可能であることを意味している。ここではこの性質を利用して解析を行なう。

第  $i$  番目のサンプル値出力  $y_i^*(t)$  の対称座標サンプル値成分を次式で定義する。

$$y_{i\mu}^S(t) = \sum_{v=0}^{N_i-1} \theta_i^{\mu v} y_{iv}^*(t) \quad \mu = 0, 1, \dots, N_i-1 \quad (103)$$

対称座標サンプル値成分  $y_{i0}^S(t)$  は、第  $i$  出力  $y_i(t)$  を周期  $T_i$  でサンプルして得られるパルス列になっている。さらに、 $y_i^*(t)$  の対称座標分解表現ベクトル  $\underline{y}_i^S(t)$  を、

$$\underline{y}_i^S(t) = (y_{i0}^S(t), y_{i1}^S(t), \dots, y_{iN_i-1}^S(t))^T \quad (104)$$

で定義する。ここで、 $N_i$  次正方行列  $\Theta_i$  を、

$$\Theta_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \theta_i & \theta_i^2 & \dots & \theta_i^{N_i-1} \\ 1 & \theta_i^2 & \theta_i^4 & \dots & \theta_i^{2(N_i-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \theta_i^{N_i-1} & \theta_i^{2(N_i-1)} & \dots & \theta_i^{(N_i-1)^2} \end{bmatrix} \quad (105)$$

で定義すれば、 $\underline{y}_i^s(t)$ は、

$$\underline{y}_i^s(t) = \Theta_i \underline{y}_i^{\text{DEV}}(t) \quad (106)$$

と表わされる。サンプル値出力  $\underline{y}^*(t)$  の対称座標分解表現ベクトル  $\underline{y}^s(t)$  を、

$$\underline{y}^s(t) = \begin{bmatrix} \underline{y}_1^s(t) \\ \underline{y}_2^s(t) \\ \vdots \\ \underline{y}_p^s(t) \end{bmatrix} \quad (107)$$

で定義する。ブロック対角行列  $\Theta$  を、

$$\Theta = \text{block diag}(\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_p) \quad (108)$$

で定義すれば、 $\underline{y}^s(t)$  と  $\underline{y}^{\text{DEV}}(t)$  には次の関係が成り立つ。

$$\underline{y}^s(t) = \Theta \underline{y}^{\text{DEV}}(t) \quad (109)$$

$\Theta_i$  は定数であるから、(103)、(106)、(109) 式の関係はそれぞれの変数をラプラス変換しても保たれる。すなわち、時間変数  $t$  を  $s$  で置き換えても (103)、(106)、(109) 式は成り立つ。(103) 式を (69) 式に代入すれば、

$$\begin{aligned} y_{i\mu}^s(s) &= \sum_{\nu=0}^{N_i-1} \theta_i^{\mu\nu} \frac{1}{T_i} \sum_m y_i(s + j\omega_0 m) \theta^{\nu m} \\ &= \frac{1}{T_i} \sum_m y_i(s + j\omega_i m - j\mu\omega_0) \quad \mu = 0, 1, \dots, N_i-1 \end{aligned} \quad (110)$$

が得られる。ここで、二番目の等式を導びくのに (26) 式を使った。したがって、

$$y_{i0}^s(s) = S_{T_i} [y_i(t)] \quad (111)$$

$$y_{i\mu}^s(s) = y_{i0}^s(s - j\mu\omega_0) \quad \mu = 0, 1, \dots, N_i-1 \quad (112)$$

となる。目標値、誤差、制御信号に対しても同様の定義ができ、同様の関係が得られる。

## 2. 対称座標多周期インパルス変調と安定条件

伝達関数  $g_{ij}(s)$  の対称座標多周期インパルス変調  $Q_{ij}^s(s)$  を、

$$Q_{ij}^s(s) = \Theta_i Q_{ij}^{\text{NIM}}(s) \Theta_j^{-1} \quad (113)$$

で定義する。 $Q_{ij}^s(s)$  は  $N_i \times N_j$  の行列である。 $\Theta_j^{-1}$  は、

$$\Theta_j^{-1} = \frac{1}{N_j} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \theta_j^{-1} & \theta_j^{-2} & \cdots & \theta_j^{-(N_j-1)} \\ 1 & \theta_j^{-2} & \theta_j^{-4} & \cdots & \theta_j^{-2(N_j-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \theta_j^{-(N_j-1)} & \theta_j^{-2(N_j-1)} & \cdots & \theta_j^{-(N_j-1)^2} \end{bmatrix} \quad (114)$$

で与えられることが容易に確かめられる。これにより、 $Q_{ij}^s(s)$  の第  $(\mu+1, \nu+1)$  要素  $q_{ij,\mu\nu}^s(s)$  は、

$$q_{ij,\mu\nu}^s(s) = \sum_{\alpha=0}^{N_i-1} \sum_{\beta=0}^{N_j-1} \theta_i^{\mu\alpha} q_{ij,\alpha\beta}^{MIM}(s) \theta_j^{-\nu\beta} / N_j \quad (115)$$

となる。ここで、(78) 式を代入すれば  $q_{ij,\mu\nu}^s(s)$  は、

$$q_{ij,\mu\nu}^s(s) = \left\{ \frac{N_i}{T_0} \sum_m q_{ij}(s + j\omega_0 m) \right\} \left\{ \frac{1}{N_i} \sum_{\alpha=0}^{N_i-1} \theta_i^{(m+\mu)\alpha} \right\} \\ \times \left\{ \frac{1}{N_j} \sum_{\beta=0}^{N_j-1} \theta_j^{-(m+\nu)\beta} \right\} \quad \begin{matrix} \mu = 0, 1, \dots, N_i-1 \\ \nu = 0, 1, \dots, N_j-1 \end{matrix} \quad (116)$$

と表わされる。

伝達関数行列  $Q(s)$  の対称座標多周期インパルス変調  $Q^s(s)$  を、

$$Q^s(s) = \begin{bmatrix} Q_{11}^s(s) & Q_{12}^s(s) & \cdots & Q_{1P}^s(s) \\ Q_{21}^s(s) & Q_{22}^s(s) & \cdots & Q_{2P}^s(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{P1}^s(s) & Q_{P2}^s(s) & \cdots & Q_{PP}^s(s) \end{bmatrix} \quad (117)$$

で定義する。 $Q^s(s)$  は  $\bar{N}$  次正方形行列である。 $Q^s(s)$  と  $Q^{MIM}(s)$  には、

$$Q^s(s) = \Theta Q^{MIM}(s) \Theta^{-1} \quad (118)$$

の関係がある。ディジタルコントローラの対称座標多周期インパルス変調  $F^s(s)$  も同様に定義できる。すなわち、 $f_i(z_i)$  の対称座標多周期インパルス変調  $F_i^s(s)$  を、

$$F_i^s(s) = \Theta_i F_i^{MIM}(s) \Theta_i^{-1} \quad i = 1, 2, \dots, P \quad (119)$$

で定義すれば、 $F^s(s)$  は

$$F^s(s) = \text{block diag} (F_1^s(s), F_2^s(s), \dots, F_P^s(s)) \quad (120)$$

で与えられる。(84)、(85)、(86)式から図. 1の多変数多周期サンプル値系は対称座標分解表現ベクトルを用いて、

$$\underline{y}^s(s) = Q^s(s) \underline{u}^s(s) \quad (121)$$

$$\underline{e}^s(s) = \underline{r}^s(s) - \underline{y}^s(s) \quad (122)$$

$$\underline{u}^s(s) = F^s(s) \underline{e}^s(s) \quad (123)$$

と記述される。

さて、ディジタルコントローラ  $f_i(z_{T_i})$  を定数  $f_i$  としよう ( $i=1, 2, \dots, p$ )。このときディジタルコントローラの対称座標多周期インパルス変調  $F^s$  は

$$F^s = \textcircled{H} F^{\text{MIM}} \textcircled{H}^{-1} = F^{\text{MIM}} \quad (124)$$

で与えられる。 $F^s$  は対角行列である。(117)式と(124)式より、

$$\det [I_N + Q^s(s) F^s] = \det [I_N + Q^{\text{MIM}}(s) F^{\text{MIM}}] \quad (125)$$

を得る。この関係を用いれば、定理. 4は次のように言い換えられる。

定理. 5 図. 1のサンプル値閉ループ系が漸近安定であるための必要十分条件は、

$$\pi_s = -N_0 \pi_0 \quad (126)$$

が成り立つことである。ただし、 $\pi_s$  は  $\det [I_N + Q^s(s) F^s]$  の  $N_0 \omega_0$ -ナイキスト軌跡が原点を時計方向に回る回数であり、 $\pi_0$  は制御対象の不安定極の個数である。 図

### 3. 対称座標多周期インパルス変調の性質

原始  $N_i$  乗根については、(26)式の関係が成立するから、(116)式の第二項は  $m+\mu$  が  $N_i$  の整数倍のとき1となり、その他のときは0となる。同様に第三項は  $m+\nu$  が  $N_j$  の整数倍のとき1となり、その他のときは0となる。この性質と(23)式を用いれば、 $\hat{g}_{ij,\mu\nu}^s(s)$  はインパルス変調によって次のように表わされる。

1.  $N_i = N_j$  のとき

$$\hat{g}_{ij,\mu\nu}^s(s) = \begin{cases} \tilde{g}_{ij}(s - j\mu\omega_0) & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \quad (127)$$

ただし、

$$\tilde{g}_{ij}(s) = S_{T_i} [g_{ij}(s)] \quad (128)$$

2.  $N_i \neq N_j$  で  $N_i$  と  $N_j$  が互いに素のとき



$T_{ij}$  を

$$T_{ij} = T_0 / (N_i N_j) = T_i / N_j = T_j / N_i \quad (129)$$

で定義する。このとき  $g_{ij,\mu\nu}^s(s)$  は

$$g_{ij,\mu\nu}^s(s) = \tilde{g}_{ij}(s-j k_{ij}(\mu,\nu)\omega_0) \quad (130)$$

と表わされる。ただし、

$$\tilde{g}_{ij}(s) = \frac{1}{N_j} S_{T_{ij}} [g_{ij}(s)] \quad (131)$$

であり、 $k_{ij}(\mu,\nu)$  は適当の整数  $m$  と  $m'$  に対して

$$k_{ij}(\mu,\nu) = N_i m + \mu = N_j m' + \nu \quad (132)$$

を満す 0 から  $N_i N_j - 1$  の間の整数である。

3.  $N_i \neq N_j$  で  $N_i$  と  $N_j$  が互いに素でないとき

$\gamma_{ij}$ 、 $n_i$ 、 $n_j$  と  $N_{ij}$  をそれぞれ次のように定義する。<sup>†)</sup>

$$\gamma_{ij} = \text{G.C.M.}(N_i, N_j) \quad (133)$$

$$n_i = N_i / \gamma_{ij}, \quad n_j = N_j / \gamma_{ij} \quad (134)$$

$$N_{ij} = \text{L.C.M.}(N_i, N_j) = N_i n_j = N_j n_i \quad (135)$$

さらに、 $T_{ij}$  を

$$T_{ij} = T_0 / N_{ij} = T_i / n_j = T_j / n_i \quad (136)$$

で定義する。このとき  $g_{ij,\mu\nu}^s(s)$  は

$$g_{ij,\mu\nu}^s(s) = \begin{cases} \tilde{g}_{ij}(s-j k_{ij}(\mu,\nu)\omega_0) & (\mu-\nu \text{ が } \gamma_{ij} \text{ の整数倍}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (137)$$

と表わされる。ただし、

$$\tilde{g}_{ij}(s) = \frac{1}{n_j} S_{T_{ij}} [g_{ij}(s)] \quad (138)$$

であり、 $k_{ij}(\mu,\nu)$  は適当な整数  $m$  と  $m'$  に対して

$$k_{ij}(\mu,\nu) = N_i m + \mu = N_j m' + \nu \quad (139)$$

を満す 0 から  $N_{ij} - 1$  の間の整数である。 $k_{ij}(\mu,\nu)$  は、 $\mu - \nu$  が  $\gamma_{ij}$  の整数倍となる

$(\mu, \nu)$  の組に対してだけ定義されることに注意されたい。

上の 1. と 2. は 3. の特別な場合である。 $N_i = 6, N_j = 9$  のときの  $Q_{ij}^s(s)$  を図. 9 に、 $k_{ij}(\mu,\nu)$  の値を表. 1 に示した。

†) G.C.M. は最大公約数、L.C.M. は最小公倍数を意味している。

対称座標多周期インパルス変調  $Q^S(s)$  の対角ブロック行列  $Q_{ii}^S(s)$  は、上の 1. の場合に相当するから、対角行列となる。すなわち、

$$Q_{ii}^S(s) = \text{diag}(\tilde{q}_{ii}(s), \tilde{q}_{ii}(s-j\omega_0), \dots, \tilde{q}_{ii}(s-j\overline{N_i-1}\omega_0)) \quad (140)$$

$\tilde{q}_{ii}(s)$  は (128) 式で与えられるから、サンプリング周期  $T_i$  のときのインパルス変調になっている。また、その他の要素は  $\tilde{q}_{ii}(s)$  と周波数が  $\mu\omega_0$  だけずれているだけであるから、そのナイキスト軌跡の形は  $\tilde{q}_{ii}(s)$  のナイキスト軌跡の形に一致する ( $\mu=1, 2, \dots, N_i-1$ )。この関係は、制御器の対称座標多周期インパルス変調  $F^S(s)$  に対しても成り立つ。すなわち、 $F_i^S(s)$  は

$$F_i^S(s) = \text{diag}(\tilde{f}_i(s), \tilde{f}_i(s-j\omega_0), \dots, \tilde{f}_i(s-j\overline{N_i-1}\omega_0)) \quad (141)$$

と書かれる。 $F_i^S(s)$  が対角行列であるから  $F^S(s)$  も対角行列となる。

$$Q_{ij}^S(s) = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{ij}(s) & 0 & 0 & \tilde{q}_{ij}(s-12\omega_{0j}) & 0 & 0 & \tilde{q}_{ij}(s-6\omega_{0j}) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{q}_{ij}(s-\omega_{0j}) & 0 & 0 & \tilde{q}_{ij}(s-13\omega_{0j}) & 0 & 0 & \tilde{q}_{ij}(s-7\omega_{0j}) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{q}_{ij}(s-2\omega_{0j}) & 0 & 0 & \tilde{q}_{ij}(s-14\omega_{0j}) & 0 & 0 & \tilde{q}_{ij}(s-8\omega_{0j}) \\ \tilde{q}_{ij}(s-9\omega_{0j}) & 0 & 0 & \tilde{q}_{ij}(s-3\omega_{0j}) & 0 & 0 & \tilde{q}_{ij}(s-15\omega_{0j}) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{q}_{ij}(s-10\omega_{0j}) & 0 & 0 & \tilde{q}_{ij}(s-4\omega_{0j}) & 0 & 0 & \tilde{q}_{ij}(s-16\omega_{0j}) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{q}_{ij}(s-11\omega_{0j}) & 0 & 0 & \tilde{q}_{ij}(s-5\omega_{0j}) & 0 & 0 & \tilde{q}_{ij}(s-17\omega_{0j}) \end{bmatrix}$$

図. 9 伝達関数  $q_{ij}(s)$  の対称座標多周期インパルス変調 ( $N_i=6, N_j=9$ )

	$\kappa_{ij}(\mu, \nu)$
$\nu=\mu$	$\mu$
$\nu=\mu+3$	$\mu+12$
$\nu=\mu+6 \pmod{9}$	$\mu+6$

表. 1 関数  $\kappa_{ij}(\mu, \nu)$  ( $N_i=6, N_j=9$ )

#### 4. M行列による安定条件

ここでは、ディジタルコントローラ  $f_i(z_{T_i})$  は定数  $f_i$  と仮定する ( $i=1, 2, \dots, p$ )。

図. 1 のサンプル値閉ループ系を、(121)、(122)、(123) 式で記述される  $\bar{N}$  入力  $\bar{N}$  出力の系とみなすことにすれば、M行列を用いた連続な系の安定条件を一般化して次の定理が得られる。

**定理. 6 (十分条件)** 図. 1 のサンプル値閉ループ系は次の二つの条件 a) と b) が満たされれば漸近安定である。

a)  $\pi_i$  を  $\hat{g}_{ii}(s)$  の  $\omega_i$ -ナイキスト軌跡が点  $-f_i^{-1} + j0$  を時計方向に回る回数とし、 $\pi_0$  を制御対象のもつ不安定極の個数とする。このとき、

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_p = -\pi_0 \quad (142)$$

が成り立つ。

b)  $\bar{N}$  次正方行列  $V(s)$  がナイキストの路上で M 行列となる。ただし、行列  $V(s)$  は次で定義される。

$$V(s) = \begin{bmatrix} V_{11}(s) & -V_{12}(s) & \dots & -V_{1p}(s) \\ -V_{21}(s) & V_{22}(s) & \dots & -V_{2p}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -V_{p1}(s) & -V_{p2}(s) & \dots & V_{pp}(s) \end{bmatrix} \quad (143)$$

ここで、 $V_{ii}(s)$  は  $N_i$  次対角行列でその第  $(\mu+1)$  要素  $v_{ii,\mu\mu}(s)$  は、

$$\begin{aligned} v_{ii,\mu\mu}(s) &= |f_i^{-1} + \hat{g}_{ii,\mu\mu}^s(s)| \\ &= |f_i^{-1} + \hat{g}_{ii}^s(s - j\mu\omega_0)| \quad \mu = 0, 1, \dots, N_i - 1 \end{aligned} \quad (144)$$

で与えられる。 $V_{ij}(s) (i \neq j)$  は  $N_i \times N_j$  の行列で  $\hat{Q}_{ij}^s(s)$  の要素をその絶対値で置き換えた行列である。すなわち、 $V_{ij}(s)$  の第  $(\mu+1, \nu+1)$  要素  $v_{ij,\mu\nu}(s)$  は、

$$v_{ij,\mu\nu}(s) = |\hat{g}_{ij,\mu\nu}^s(s)| \quad \begin{matrix} \mu = 0, 1, \dots, N_i - 1 \\ \nu = 0, 1, \dots, N_j - 1 \end{matrix} \quad (145)$$

で与えられる。

【証明】 定理. 5 から、

$$\pi_s = N_0 (\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_p) \quad (146)$$

を示せばよいことが分る。 $\bar{N}$  次正方行列  $V'(s, \varepsilon)$  を、

$$V'(s, \underline{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} f_1^{-1} I_{N_1} + Q_{11}^s(s) & \varepsilon_2 Q_{12}^s(s) & \cdots & \varepsilon_p Q_{1p}^s(s) \\ \varepsilon_1 Q_{21}^s(s) & f_2^{-1} I_{N_2} + Q_{22}^s(s) & \cdots & \varepsilon_p Q_{2p}^s(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1 Q_{p1}^s(s) & \varepsilon_2 Q_{p2}^s(s) & \cdots & f_p^{-1} I_{N_p} + Q_{pp}^s(s) \end{bmatrix} \quad (147)$$

で定義する。ただし、 $\varepsilon_i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ )は実数であり  $\underline{\varepsilon}$  は

$$\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p)^T \quad (148)$$

の  $p$  次ベクトルである。 $\pi'(\underline{\varepsilon})$  を  $\det[V'(s, \underline{\varepsilon})]$  の  $N_0 \omega_0$ -ナイキスト軌跡が原点時計方向に回る回数としよう。 $\underline{\varepsilon} = \underline{0}$  のときは、

$$\begin{aligned} \det[V'(s, \underline{0})] &= \prod_{i=1}^p \det[f_i^{-1} I_{N_i} + Q_{ii}^s(s)] \\ &= \prod_{i=1}^p \prod_{\mu=0}^{N_i-1} (f_i^{-1} + \tilde{q}_{ii}(s - j\mu\omega_0)) \end{aligned} \quad (149)$$

となる。ここで、 $\tilde{q}_{ii}(s)$  と  $\tilde{q}_{ii}(s - j\mu\omega_0)$  の  $N_0 \omega_0$ -ナイキスト軌跡の形が同じであることに注意すれば、

$$\pi'(\underline{0}) = N_1 \pi'_1 + N_2 \pi'_2 + \cdots + N_p \pi'_p \quad (150)$$

が得られる。ただし、 $\pi'_i$  は  $\tilde{q}_{ii}(s)$  の  $N_0 \omega_0$ -ナイキスト軌跡が点  $-f_i^{-1} + j0$  を時計方向に回る回数である。ところで、 $\tilde{q}_{ii}(s)$  は周期  $j\omega_i$  をもち、 $\omega_i = N_i \omega_0 / l_i$  であるから  $\pi'_i$  と  $\pi_i$  ( $\tilde{q}_{ii}(s)$  の  $\omega_i$ -ナイキスト軌跡が点  $-f_i^{-1} + j0$  を回る回数) には、

$$\pi'_i = l_i \pi_i \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (151)$$

の関係がある。したがって

$$\begin{aligned} \pi'(\underline{0}) &= N_1 l_1 \pi_1 + N_2 l_2 \pi_2 + \cdots + N_p l_p \pi_p \\ &= N_0 (\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_p) \end{aligned} \quad (152)$$

となる。さて、条件b)により、 $\det[V'(s, \underline{\varepsilon})]$  は  $0 < \varepsilon_i \leq 1$  の  $\underline{\varepsilon}$  に対してナイキストの路上で0となることはないから、Rouchéの定理により、

$$\pi'(I_p) = \pi'(\underline{0}) \quad (153)$$

を得る。 $V'(s, \underline{\varepsilon})$  の定義から、

$$I_N + Q^s(s) F^s = V'(s, I_p) F^s \quad (154)$$

の関係があるから、

$$\det[I_N + Q^s(s) F^s] = f_1^{N_1} f_2^{N_2} \cdots f_p^{N_p} \det[V'(s, I_p)] \quad (155)$$

となる。したがって、

$$\pi_s = \pi'(I_p) = N_0 (\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_p) \quad (156)$$

が得られる。

[証明終わり]

## 5. 多周期一般化ゲルシュゴリン帯と安定条件

連続系の一般化ゲルシュゴリン帯の理論<sup>12), 13)</sup>を図. 1 の多変数多周期サンプル値系に拡張する。図. 1 でそれぞれのループをディジタルコントローラ  $f_i(z_{Ti})$  で閉じたときの制御信号  $\underline{u}^*(t)$  から制御量  $\underline{y}^*(t)$  への伝達特性は (84)、(85)、(86) 式より多周期インパルス変調を用いて、

$$\underline{y}^{DEV}(s) = H^{MIM}(s) \underline{u}^{DEV}(s) \quad (157)$$

$$H^{MIM}(s) = [I_{\bar{n}} + Q^{MIM}(s) F^{MIM}(s)]^{-1} Q^{MIM}(s) \quad (158)$$

と表わされる。また、対称座標多周期インパルス変調を用いれば (121)、(122)、(123) 式より、

$$\underline{y}^S(s) = H^S(s) \underline{u}^S(s) \quad (159)$$

$$H^S(s) = [I_{\bar{n}} + Q^S(s) F^S(s)]^{-1} Q^S(s) \quad (160)$$

と表わされる。 $H^{MIM}(s)$ ,  $H^S(s)$  を、

$$H^{MIM}(s) = \begin{bmatrix} H_{11}^{MIM}(s) & H_{12}^{MIM}(s) & \dots & H_{1p}^{MIM}(s) \\ H_{21}^{MIM}(s) & H_{22}^{MIM}(s) & \dots & H_{2p}^{MIM}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{p1}^{MIM}(s) & H_{p2}^{MIM}(s) & \dots & H_{pp}^{MIM}(s) \end{bmatrix} \quad (161)$$

$$H^S(s) = \begin{bmatrix} H_{11}^S(s) & H_{12}^S(s) & \dots & H_{1p}^S(s) \\ H_{21}^S(s) & H_{22}^S(s) & \dots & H_{2p}^S(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{p1}^S(s) & H_{p2}^S(s) & \dots & H_{pp}^S(s) \end{bmatrix} \quad (162)$$

とブロック行列に分解しておく。ここで  $H_{ij}^{MIM}(s)$ ,  $H_{ij}^S(s)$  は  $N_i \times N_j$  の行列である。

$H_{ij}^{MIM}(s)$ ,  $H_{ij}^S(s)$  には、

$$H_{ij}^S(s) = \Theta_i H_{ij}^{MIM}(s) \Theta_j^{-1} \quad (163)$$

の関係がある。 $H^{MIM}(s), H^S(s)$  の対角ブロック行列  $H_{ii}^{MIM}(s), H_{ii}^S(s)$  の第  $(\mu + 1, \nu + 1)$  要素をそれぞれ  $h_{ii,\mu\nu}^{MIM}(s), h_{ii,\mu\nu}^S(s)$  と書くことにする。すなわち、

$$H_{ii}^{MIM}(s) = (h_{ii,\mu\nu}^{MIM}(s)) \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots, N_i - 1 \quad (164)$$

$$H_{ii}^S(s) = (h_{ii,\mu\nu}^S(s)) \quad (165)$$

それぞれのループを制御器  $f_i(zT_i)$  で閉じたときの  $i$  番の制御信号  $u_i^*(t)$  から  $i$  番目の制御量  $y_i^*(t)$  へのパルス伝達関数のインパルス変調は、 $h_{ii,00}^S(s)$  に一致する。実際、 $i$  以外の制御信号  $u_j^*(t) (j = 1, 2, \dots, P; j \neq i)$  を 0 とし、第  $i$  制御信号  $u_i^*(t)$  に単位インパルス  $\delta(t)$  を加える場合を考える。このときの制御信号の分解表現ベクトル  $\underline{u}^{DEV}(s)$  は、

$$\underline{u}^{DEV}(s) = ((\underline{u}_1^{DEV}(s))^T, (\underline{u}_2^{DEV}(s))^T, \dots, (\underline{u}_P^{DEV}(s))^T)^T \quad (166)$$

$$\underline{u}_i^{DEV}(s) = (1, 0, \dots, 0)^T \quad (167)$$

$$\underline{u}_j^{DEV}(s) = \underline{0} \quad j = 1, 2, \dots, P; j \neq i \quad (168)$$

となる。この制御信号に対する第  $i$  制御量  $y_i^*(t)$  の分解表現ベクトル  $\underline{y}_i^{DEV}(s)$  は、(157) 式より、

$$\underline{y}_i^{DEV}(s) = H_{ii}^{MIM}(s) \underline{u}_i^{DEV}(s) \quad (169)$$

で与えられる。したがって、このときの制御量  $y_i^*(t)$  の対称座標サンプル値成分  $y_{i0}^S(s)$  は (103) 式より、

$$y_{i0}^S(s) = S_{T_i}[y_i^*(t)] = \sum_{\mu=0}^{N_i-1} y_{i\mu}^{DEV}(s) = \sum_{\mu=0}^{N_i-1} h_{ii,\mu 0}^{MIM}(s) \quad (170)$$

となる。 $u_i^*(t)$  から  $y_i^*(t)$  へのパルス伝達関数は  $u_i^*(t)$  に単位インパルスを加えたときの出力  $y_i(t)$  を周期  $T_i$  でサンプルして得られるパルス列の  $z$ -変換であるから (170) 式が  $u_i^*(t)$  から  $y_i^*(t)$  へのパルス伝達関数のインパルス変調となっている。

次に、 $i$  以外の制御信号を 0 とし第  $i$  制御信号  $u_i^*(t)$  に時間が  $\nu T_i$  だけ遅れた単位インパルス  $\delta(t - \nu T_i)$  を加えた場合を考えよう。このとき、 $\underline{u}^{DEV}(s)$  の各サブベクトルは、

$$\underline{u}_i^{DEV}(s) = (0, \dots, 0, e^{-\nu s T_i}, 0, \dots, 0)^T \quad (171)$$

$$\underline{u}_j^{DEV}(s) = \underline{0} \quad j = 1, 2, \dots, P; j \neq i \quad (172)$$

となるから、この制御信号に対する第  $i$  操作量  $y_i^*(t)$  の分解表現ベクトル  $\underline{y}_i^{DEV'}(s)$  は、

$$\underline{y}_i^{\text{DEV}}(s) = H_{ii}^{\text{MIM}}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e^{-vT_i s} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (173)$$

と表わされる。したがって、 $y_i^*(t)$  の対称座標サンプル値成分  $y_{i0}^{s'}(s)$  は、

$$y_{i0}^{s'}(s) = \sum_{\mu=0}^{N_i-1} h_{ii,\mu}^{\text{MIM}}(s) e^{-vT_i s} \quad (174)$$

で与えられる。 $y_{i0}^s(s)$  と  $y_{i0}^{s'}(s)$  を比較すると第  $i$  制御信号へ加えられた単位インパルスの時間が  $vT_i$  だけずれているだけであるから、

$$y_{i0}^{s'}(s) = y_{i0}^s(s) e^{-vT_i s} \quad (175)$$

の関係がある。したがって、(170)、(174) 式より

$$\sum_{\mu=0}^{N_i-1} h_{ii,\mu 0}^{\text{MIM}}(s) = \sum_{\mu=0}^{N_i-1} h_{ii,\mu v}^{\text{MIM}}(s) \quad v = 1, 2, \dots, N_i - 1 \quad (176)$$

を得る。ところで、 $H_{ii}^s(s)$  の (1, 1) 要素  $h_{ii,00}^s(s)$  は (163) 式より

$$h_{ii,00}^s(s) = \sum_{\mu=0}^{N_i-1} \sum_{v=0}^{N_i-1} h_{ii,\mu v}^{\text{MIM}}(s) / N_i \quad (177)$$

と書かれる ((116) 式参照)。これと (176) 式より、

$$h_{ii,00}^s(s) = \sum_{\mu=0}^{N_i-1} h_{ii,\mu 0}^{\text{MIM}}(s) \quad (178)$$

を得る。この式は、 $h_{ii,00}^s(s)$  が第  $i$  制御信号  $u_i^*(t)$  から第  $i$  制御量  $y_i^*(t)$  へのパルス伝達関数のインパルス変調となっていることを意味している。

さて、第  $i$  ループの制御器  $f_i(z_{T_i})$  を 0 とし、 $i$  以外のループをディジタルコントローラ  $f_j(z_{T_j})$  で閉じたときの  $u_i^*(t)$  から  $y_i^*(t)$  へのパルス伝達関数について考えよう。このパルス伝達関数のインパルス変調は (160) 式の  $F^s(s)$  に

$$F_i^s(s) = \text{block diag} (F_1^s(s), \dots, F_{i-1}^s(s), 0, F_{i+1}^s(s), \dots, F_r^s(s)) \quad (179)$$

を代入して得られる  $H^s(s)$  の対角ブロック行列  $H_{ii}^s(s)$  の (1, 1) 要素に等しい。これを  $h_i^s(s|F^s)$  と書こう。 $h_i^s(s|F^s)$  は連続系の一般化ゲルシュゴリン帯の理論を拡張して次のように評価できる。まず、図. 1 の系を (121)、(122)、(123) 式で記述される  $\bar{N}$  入力  $\bar{N}$  出力の系とみなそう。さらに、 $F^s(s)$  の各対角要素は独立に選

べるものと考えておく。  $F_{\bar{\mu}}^s(s)$  を、

$$F_{\bar{\mu}}^s(s) = \text{diag} (f_{i_0}^s(s), \dots, f_{i_{N_i-1}}^s(s), \dots, f_{i_0}^s(s), \dots, f_{i_{\mu-1}}^s(s), \\ 0, f_{i_{\mu+1}}^s(s), \dots, f_{i_{N_i-1}}^s(s), \dots, f_{p_0}^s(s), \dots, f_{p_{N_p-1}}^s(s)) \quad (180)$$

で定義する。この  $F_{\bar{\mu}}^s(s)$  を (160) 式に代入して得られる  $h_{ii,\mu\mu}^s(s)$  を  $h_{i\mu}^s(s|F^s)$  と書く。  $h_{i\mu}^s(s|F)$  の評価には連続系の一般化ゲルシュゴリン帯の理論が<sup>(12),(13)</sup>そのまま適用でき次の補題が成り立つ。

補題. 1  $Q^s(s)$  に対して、行列  $B(s)$  を次のように定義する。

$$B(s) = \begin{bmatrix} 0 & V_{12}(s) & \dots & V_{1p}(s) \\ V_{21}(s) & 0 & \dots & V_{2p}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{p1}(s) & V_{p2}(s) & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (181)$$

ここで、  $V_{ij}(s)$  ( $i \neq j$ ) は (145) 式で与えられる行列である。  $\bar{N}$  次対角行列  $A(s) = \text{diag} (a_{i_0}(s), \dots, a_{i_{N_i-1}}(s), \dots, a_{p_0}(s), \dots, a_{p_{N_p-1}}(s))$  を  $A(s) - B(s)$  が半M行列となるように選ぶ。このとき、  $i$  以外の  $j$  に対して、

$$|f_{jv}^{-1}(s) + g_{jj,\nu\nu}^s(s)| > a_{jv}(s) \quad \begin{matrix} j=1, 2, \dots, p; j \neq i \\ \nu=0, 1, \dots, N_j-1 \end{matrix} \quad (182)$$

と  $\mu$  以外の  $\nu$  に対して、

$$|f_{i\nu}^{-1}(s) + g_{ii,\nu\nu}^s(s)| > a_{i\nu}(s) \quad \nu=0, 1, \dots, N_i-1; \nu \neq \mu \quad (183)$$

が満たされていれば、

$$|h_{i\mu}^s(s|F^s) - g_{ii,\mu\mu}^s(s)| \begin{cases} < a_{i\mu}(s) & (a_{i\mu}(s) \neq 0) \\ = 0 & (a_{i\mu}(s) = 0) \end{cases} \quad (184)$$

が成り立つ。ただし、(182)、(183) 式は  $f_{jv}^s(s) = 0, f_{i\nu}^s(s) = 0$  のときにも満たされているものとみなす。 ■

この補題では、  $F^s(s)$  の各要素は独立に選べるものと仮定している。しかし、実際には (121) 式の関係があるから独立に選べるのは  $f_{i_0}^s(s), f_{i_2}^s(s), \dots, f_{p_0}^s(s)$

の  $p$  個だけである。  $f_i(z_{T_i}) = 0$  とすれば、  $f_{i_0}^s(s) = f_{i_1}^s(s) = \dots = f_{i_{N_i-1}}^s(s) = 0$  となる。この場合でも補題. 1 は成立するから、  $h_i^s(s|F^s)$  が次のように評価できる。ただし、インパルス変調を用いて (182) 式の条件を書き換えてある ((140)、(14



1) 式参照)。

補題. 2  $A(s)$  を補題. 1 で与えられる行列とする。このとき、 $i$  以外の  $j$  に対して

$$|\tilde{f}_i^{-1}(s-j\nu\omega_0) + \tilde{g}_{ji}(s-j\nu\omega_0)| > a_{j\nu}(s) \quad \begin{matrix} j=1, 2, \dots, p; j \neq i \\ \nu=0, 1, \dots, N_i-1 \end{matrix} \quad (185)$$

が満たされていれば、

$$|h_i^s(s|F^s) - \tilde{g}_{ii}^s(s)| \begin{cases} < a_{i0}(s) & (a_{i0}(s) \neq 0) \\ = 0 & (a_{i0}(s) = 0) \end{cases} \quad (186)$$

が成り立つ。ただし、(185) 式は  $\tilde{f}_j(s-j\nu\omega_0) = 0$  のときにも満たされているものとみなす。 ■

さて、複素平面上で

$$\text{中心: } \tilde{g}_{ii}(s-j\mu\omega_0) \tilde{f}_i(s-j\mu\omega_0)$$

$$\text{半径: } a_{i\mu}(s) \tilde{f}_i(s-j\mu\omega_0)$$

の円板  $\delta_{i\mu}(s)$  を考える ( $i=1, 2, \dots, p; \mu=0, 1, \dots, N_i-1$ )。周波数  $\omega$  がナイキストの路上で  $-N_0\omega_0/2$  から  $N_0\omega_0/2$  まで動くときの  $\delta_{i\mu}(j\omega)$  の軌跡を  $D_{i\mu}$  とする。

$\delta_{i\mu}(s)$  を  $(i, \mu)$  多周期一般化ゲルシュゴリン円板、 $D_{i\mu}$  を  $(i, \mu)$  多周期一般化ゲルシュゴリン帯と呼ぼう。 $D_{i\mu}$  ( $\mu=0, 1, \dots, N_i-1$ ) の中心は一致する。 $D_{i\mu}$  ( $\mu=0, 1, \dots, N_i-1$ ) を重ねてできる幅の広い帯を  $D_i$  とする。 $D_i$  を  $i$  番目の多周期一般化ゲルシュゴリン帯と呼ぼう。このように、多周期一般化ゲルシュゴリン帯を定義すれば、補題. 2 から次の定理が得られる。

定理. 7  $i$  以外の多周期一般化ゲルシュゴリン帯  $D_i$  が点  $-1 + j0$  を中に含まなければ、 $h_i^s(s|F) \tilde{f}_i^s(s)$  のナイキスト軌跡は  $i$  番目の多周期一般化ゲルシュゴリン帯  $D_i$  の中に含まれる。 ■

次に、多周期一般化ゲルシュゴリン帯を用いた安定条件について述べる。ディジタルコントローラ  $f_i(z_{T_i})$  は定数  $f_i$  とする。 $(i, \mu)$  一般化ゲルシュゴリン帯  $D_{i\mu}$  が点  $-1 + j0$  を中に含まないことは、

$$|f_i^{-1} + \tilde{g}_{ii}(s-j\mu\omega_0)| > a_{i\mu}(s) \quad \begin{matrix} i=1, 2, \dots, p \\ \mu=0, 1, \dots, N_i-1 \end{matrix} \quad (187)$$

と等価である。(187) 式は (143) 式の  $V(s)$  の対角要素が  $A(s) - B(s)$  の対応する対角要素より大きいことを意味している。また、 $V(s)$  と  $A(s) - B(s)$  の非対角要素は等しい。このことは、 $A(s) - B(s)$  が半M行列ならば  $V(s)$  がM行列となることを意味し

ている。したがって、定理. 6より次の安定条件が得られる。

定理. 8 (多周期一般化ゲルシュゴリン帯を用いた十分条件) 図. 1の多変数多周期サンプル値系は次の二つの条件a)、b)が満たされれば漸近安定である。

a) 定理. 6の条件a)が成立する。

b) すべての多周期一般化ゲルシュゴリン帯  $D_i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) が点  $-1 + j0$  を中に含まない。 ■

制御対象が安定であれば定理. 8の特別な場合として次の定理が得られる。

定理. 9 制御対象  $G(s)$  が不安定極をもたないとする。このとき、すべての多周期一般化ゲルシュゴリン帯  $D_i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) が点  $-1 + j0$  のまわりを回ることなく、かつ含むこともなければ、図. 1の多変数多周期サンプル値系は漸近安定である。 ■

定理. 7より、すべての多周期一般化ゲルシュゴリン帯が点  $-1 + j0$  を中に含まなければ他のループを閉じたときの開ループ系のパルス伝達関数のベクトル軌跡は多周期一般化ゲルシュゴリン帯の内部に含まれる。さらに、定理. 9より、制御対象が安定である場合は多周期一般化ゲルシュゴリン帯が点  $-1 + j0$  を含まずかつ一回も回らないことが安定であるための十分条件となっている。したがって、連続系と同様に多周期一般化ゲルシュゴリン帯を幅のあるベクトル軌跡と考えて、これをもとにディジタルコントローラ  $f_i(z_i)$  の設計を行うことができる。

行列  $A(s)$  の計算方法としては連続系の場合と同様に次の三つが考えられる。

1. 伝達関数行列  $Q(s)$  の多周期干渉行列  $C(s|Q^s)$  を、

$$C(s|Q^s) = \text{block} (C_{ij}(s)) \quad (188)$$

で定義する。ここで  $C_{ij}(s)$  は  $N_i \times N_j$  の行列で次式で与えられる。

$$\begin{cases} C_{ii}(s) = 0 & i = 1, 2, \dots, p \\ C_{ij}(s) = V_{ij}(s) \{ \text{diag} (|\tilde{g}_{ij}(s)|, |\tilde{g}_{ij}(s-j\omega_0)|, \dots, |\tilde{g}_{ij}(s-j(N_i-1)\omega_0)|) \}^{-1} & i, j = 1, 2, \dots, p; i \neq j \end{cases} \quad (189)$$

伝達関数行列  $Q(s)$  の多周期干渉指数  $\lambda(s|Q^s)$  を  $C(s|Q^s)$  の最大固有値で定義する。このとき、 $A(s)$  を

$$a_{i\mu}(s) = \lambda(s|Q^s) |\tilde{g}_{ii}(s-j\mu\omega_0)| \quad (190)$$

で定める(補題2. 1参照)。

2.  $A(s)$  を

$$a_{i\mu}(s) = \sum_{j=1, j \neq i}^p \sum_{v=0}^{N_j-1} |\tilde{g}_{ij}^s, \mu v(s)| \quad (191)$$

で定める (補題 2. 2 参照)。

3.  $A(s)$  を

$$a_{i\mu}(s) = \sum_{j=1, j \neq i}^P \sum_{\gamma=0}^{N_j-1} |q_{ji, \gamma \mu}^s(s)| \quad (192)$$

で定める (補題 2. 3 参照)。

## 第 4 章

### 結 論

本論文では、連続な多変数系の周波数領域における基礎理論と制御系の設計法および多変数多周期サンプル値系の基礎理論を与えた。

2章では、はじめに連続な多変数制御系の設計のための基礎理論について述べ、次にこの結果をもとに多変数制御系の設計法を提案しその適用例を示した。2.1では、本論文で提案する直列補償法の基礎となるAraki-Nwokahによって与えられた一般化ゲルシュゴリン<sup>12), 13)</sup>帯の理論について説明した。一般化ゲルシュゴリン帯は、他のループを閉じたときの開ループ伝達関数  $h_i(s|F)$  のベクトル軌跡の存在範囲を示す帯であり、これを幅のあるベクトル軌跡とみなして主制御器を設計することができる。2.2では一般化ゲルシュゴリン帯を位相ゲイン線図上に写像した像（一般化ゲルシュゴリン擬似帯）の性質について考察し、一般化ゲルシュゴリン擬似円板の大きさが干渉指数だけで決定され、各ループとも同じ大きさになることを示した。2.3では、閉ループ共振値 $M_p$ を規範として主制御器を設計する場合には、一般化ゲルシュゴリン帯より幅の狭い $M_p$ 修正一般化ゲルシュゴリン帯の中に  $h_i(s|F)$  のベクトル軌跡が含まれることを示した。 $M_p$ 修正一般化ゲルシュゴリン帯はRosenbrockの<sup>6)</sup>Ostrowski 帯に対応するものである。Ostrowski 帯の幅は他のループの主制御器の値に依存して決まるため主制御器の設計の最初の段階から使うことはできない。これに対し、 $M_p$ 修正一般化ゲルシュゴリン帯は $M_p$ をある値以下になるように各ループの主制御器を決定するという条件をつけるだけで得られる帯であり主制御器の設計の最初の段階から使うことができるという利点がある。2.4では、干渉指数の物理的意味について述べた。干渉指数は、1) 他のループを閉じることによって生じる開ループ伝達関数の相対的な変化の上限、2) 非対応入力によって生じる出力の最大相対誤差の上限を与える量であり、相互干渉の大きさを表わす指標に適した量といえる。干渉指数は

スカラー量であるため、相互干渉の大きさを直感的に把握することができる。2. 5では、干渉指数を用いて開ループ系と閉ループ系の相互干渉の大きさの関係を数値的に明らかにした。これにより、制御器の設計のはじめの段階から閉ループ系の相互干渉の大きさを考慮することが可能となった。2. 6では、周波数応答を基にしたフィードフォワード補償について述べた。2. 7では、2. 1から5の結果をもとに連続な多変数制御系の直列補償法を提案した。この直列補償法は主にINA法の考え方を基本としているが、逆伝達関数行列のゲルシュゴリン帯の代わりに普通の伝達関数行列の一般化ゲルシュゴリン疑似帯を用いる点で異っている。ここで提案した直列補償法には、次のような特長がある。

- a) 一般化ゲルシュゴリン疑似帯の幅は各ループとも同じでバランスがとれている。
- b) 高い周波数帯まで近似対角化補償する必要がある。
- c) 閉ループ系の相互干渉を考慮した近似対角化のための指針が与えられている。

2. 8では、2. 6の結果をもとに本論文で提案した直列補償法によって設計された閉ループ制御系に対するフィードフォワード補償法を提案した。このフィードフォワード補償法は、閉ループ制御系の設計時に用いられるデータをそのまま利用して設計が行なえる点に特長がある。フィードフォワード補償については、状態変数に基づいたDavison (63)、(64)、田嶋、安藤他 (65)の研究があるが、これらの方法との比較はフィードバック補償の部分の考え方が異なるので単純には行なえない。2. 9では、本論文で提案した設計法の適用例を示した。はじめにMcMorranがINA法の適用例に用いたガスタービンに対して本論文で提案した直列補償法を適用した。McMorranは伝達関数行列の要素の大きさのバランス<sup>26)</sup>をとるために前置補償器を必要とした。また、Leininger は同様の目的のために、<sup>66)</sup>dominance sharing という手法を提案している。これに対し、本設計法で用いる一般化ゲルシュゴリン疑似帯にはa)の性質があるため、このような操作を必要としない。また、b)の特長があるため、近似対角化補償要素もMcMorranの設計したものより簡単なものとなっている。次に、2. 9ではボイラの制御系に直列補償法を適用し主制御器を設計した。さらに、この閉ループ制御系に対し、本論文で提案したフィードフォワード補償法を適用して、その有効性を確認した。ボイラの制御に対してはフィードフォワード補償の有効性が古くから知られており、古典的な非干渉制御とともに考察された研究もある。これは、<sup>61)</sup>ボイラの特徴を考慮した方法でボイラに対しては有効な方法であったが、定式化された一般的な方法ではない。これに対し、本論文の方法はHawkins (18)、(19)によって提案された近似対角化と同じ基準に基づいた一般的手法である。

本論文で提案した設計法では、各補償要素は設計者が判断しながら試行錯誤的に決定されていく。このため、能率的に設計を進めるためにはグラフィック機能をもったman machine interactive なCADシステムが不可欠である。本論文で提案した設計法を取り入れたこのようなCADシステムとして矢野、荒木他 (67) によって作成されたMCSDがある。本文の例題の制御系の設計にはこのMCSDを用いた。

3章では、多変数多周期サンプル値系に対し連続系の一般化ゲルシュゴリン帯の理論を拡張し、多変数多周期サンプル値系の設計のための基礎理論を与えた。3.1では、本文であつかう制御系の説明を行った。制御系としては、分散型のディジタルコントローラをもつ制御系を考えている。各ループのディジタルコントローラのサンプリング周期の比は有理数になると仮定している。各ループのサンプリング周期が与えられたとき、それぞれのサンプリング周期の比は有理数で近似できること、実際の制御系で厳密なサンプリング周期の値が要求されることは少なく各ループのサンプリング周期の比が有理数となるように選ぶことが可能であることを考えれば、この仮定は実用上大きな制約を与えるものではない。また、サンプリングは同時に開始されるものと仮定している。3.2では制御系の各変数に対して離散時間信号ベクトルを定義し、多変数多周期サンプル値系の離散時間実現を導いた。さらに、この離散時間実現をもとに多変数多周期サンプル値系の安定条件を示した。3.3では、はじめにいくつかの異った周期をもつパルス列を扱かうためにパルス列に対し分解表現ベクトルを定義した。そして、入出力パルス列をそれぞれ分解表現ベクトルで表わしたときの入出力パルスの関係を与える多周期インパルス変調を導いた。さらに、離散時間信号ベクトルと分解表現ベクトルの関係について述べ多周期インパルス変調による多変数多周期サンプル値系の安定条件を与えた。多周期インパルス変調の対角ブロック行列は巡回行列となっており、対角化可能である。3.4では、多周期インパルス変調の対角化可能性を利用するために対称座標分解表現ベクトルを定義した。対称座標分解表現ベクトルは、分解表現ベクトルを対称座標変換して得られるベクトルである。そして、入出力パルス列を対称座標分解表現ベクトルで表わしたときの入出力関係を与える対称座標多周期インパルス変調を導いた。さらに、対称座標多周期インパルス変調に対して連続系の一般化ゲルシュゴリン帯の理論を拡張し他のループを閉じたときの開ループのパルス伝達関数（のインパルス変調）の評価を行なうとともに、一般化ゲルシュゴリン帯を用いた安定条件を示した。各ループのサンプリング周期がすべて等しい場合は、対称座標多周期インパルス変調は普通のパルス伝達関数行列に一致する。対称座標多周期インパ

ス変調はパルス伝達関数行列を多周期サンプル値系に拡張したものとなっており、制御系の入出力関係を直感的に把握することができる。対称座標多周期インパルス変調の一般化ゲルシュゴリン帯を連続系と同じように幅のあるベクトル軌跡と考えれば、周波数応答に着目した多変数多周期サンプル値系の設計を行うことができる。

## 謝辞

本研究を行うに当たり、著者を常に叱咤激励し有益な助言を下された京都大学工学部近藤文治教授、直接御指導下された京都大学工学部荒木光彦助教授に深謝します。

## 【参考文献】

- 1) K.Ogata: State Space Analysis of Control Systems; Prentice-Hall, Inc. (1967)
- 2) H.Kwakernaak, R.Sivan: Linear Optimal Control Systems; Wiley-Interscience, (1972)
- 3) H.H.Rosenbrock, P.D.McMorran: Good, Bad, or Optimal?; IEEE. Trans. Automat. Contr. Vol. AC-16, pp.552-554 (1971)
- 4) I.M.Horowitz, U.Shaked: Superiority of Transfer Function Over State-Variable Methods in Linear Time-Invariant Feedback System Design; IEEE. Trans. Automat. Contr. Vol. AC-20, pp.84-97 (1975)
- 5) H.H.Rosenbrock: Design of Multivariable Control Systems Using the Inverse Nyquist Array; Proc. IEE, Vol.116, pp.1929-1936 (1969)
- 6) H.H.Rosenbrock: Computer Aided Control System Design; Academic Press (1974)
- 7) D.Q.Mayne: The Design of Linear Multivariable Systems; Automatica, Vol. 9, pp.201-207 (1973)
- 8) D.Q.Mayne: The Effect of Feedback on Linear Multivariable Systems; Automatica, Vol. 10, pp.405-412 (1974)
- 9) J.J.Belletrutti, A.G.J.MacFarlane: Characteristic Loci Techniques in Multivariable-Control-System Design; Proc. IEE, Vol. 118, pp.1291-1297 (1971)
- 10) A.G.J.MacFarlane, J.J.Belletrutti: The Characteristic Locus Design Method; Automatica, Vol. 9, pp.575-588 (1973)
- 11) 木村: 根軌跡配置による高ゲインフィードバック制御系の構成; 計測自動制御学会論文集、18巻、5号、pp. 429-435 (昭. 57-5)
- 12) M.Araki, O.I.Nwokah: Bounds for Closed-Loop Transfer Function of Multivariable Systems; IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. AC-20, pp.666-670 (1975)
- 13) O.I.Nwokah: The Design of Linear Multivariable Systems; Ph.D.Thesis, Dept. Computing and Control, Imperial College, London (1975)
- 14) 朴、鈴木、吉村: 逆周波数応答に基づく多変数フィードバック制御系の設計; 電気学会雑誌、Vol. 50-C-17、pp. 123-129 (昭. 50)
- 15) J.O.Gray, P.M.Taylor: Frequency Domain Functionals for Assessment of Interaction Effects in Multivariable



- Feedback Systems; Proc. IFAC Symp. Computer Aided Design of Control Systems, pp.81-86, Zurich (1976)
- 16) P.M.Taylor, G.E.Hayton: The Manipulation of Interaction in Multivariable Feedback Systems; IFAC 8-th Triennial World Congress, Vol.4, pp.6-11, Kyoto (1981)
  - 17) P.M.Schafer, M.K.Sain: Input Compensation for Dominance of Turbofan Models; Alternatives for Linear Multivariable Control (Edit. M.K.Sain, et al) National Engineering Consortium, pp.156-169 (1978)
  - 18) D.J.Hawkins: Pseudodiagonalization and the Inverse-Nyquist-Array Method; Proc. IEE, Vol. 119, pp.337-345 (1972)
  - 19) D.J.Hawkins: Multifrequency Version of Pseudodiagonalization; Electronics Letter, Vol. 8, No. 19, pp.473-474 (1972)
  - 20) K.C.Daly, P.J.Mason: An Extended Pseudodiagonalization Procedure for Dominance Improvement; Proc. IEE, Vol. 126 pp.113-114 (1979)
  - 21) G.G.Leininger: Diagonal Dominance for Multivariable Nyquist Array Method Using Function Minimization; Automatica, Vol. 15, pp.339-345 (1979)
  - 22) G.G.Leininger: Multivariable Compensator Design Using Bode Diagram and Nichols Charts; Proc. IFAC Symp. Computer Aided Design of Control Systems, pp.127-132, Zurich (1979)
  - 23) J.C.Doyle, G.Stein: Multivariable Feedback Design; Concepts for a Classical/Modern Synthesis; IEEE Trans. Automat. Contr. Vol.AC-26, pp.4-16 (1981)
  - 24) L.Postlethwaite, J.M. Edmunds, A.G.J.MacFarlane: Principal Gains and Principal Phases in the Analysis of Linear Multivariable Feedback Systems; *ibid*, pp.32-46 (1981)
  - 25) H.H.Rosenbrock, N.Munro: The Inverse Nyquist Array Method; Alternatives for Linear Multivariable Control (Edit. M.K.Sain, et al) National Engineering Consortium, pp.101-137 (1978)
  - 26) P.D.McMorran: Design of Gas-Turbine Controller Using Inverse Nyquist Method; Proc. IEE, Vol. 117, pp.1377-1382 (1970)

- 27) N.Munro: Design of Controllers for Open-Loop Unstable Multivariable System Using Inverse Nyquist Array; Proc. IEE, Vol.119, pp.1377-1382 (1972)
- 28) F.M.Hugh, A.Mallouppa: Application of Frequency Response Methods to Nuclear Power Station Once-Through Boiler Control; Preprints 3rd IFAC Symp. Multivariable Technological Systems, No. F3, Manchester (1974)
- 29) N.Munro, D.E.Winterbone, P.M.G.Lourtie: Design of Multivariable Controller for an Automotive Gas Turbine; ibid., No. F4, (1974)
- 30) S.I.Ashon, H.Nicholson: Improvement of Turbo-Alternator Response Using the Inverse Nyquist Array Method; Int. J. Control, Vol. 23, No. 5, pp.657-672 (1976)
- 31) H.A.Spang III: Insight into the Application of the Inverse Nyquist Array Method to Turbofan Engine Control; Alternatives for Linear Multivariable Control (Edit. M.K.Sain, et al) National Engineering Consortium, pp.138-155 (1978)
- 32) 高橋： 条鋼ミルの多変数制御（１）； 実例にもとづく多変数制御に関する研究発表会資料（計測自動制御学会関西支部主催）、pp. 119-131、大阪（昭. 53-12）
- 33) R.Whalley, M.G.Wangh, N.Munro, G.Thiruarooran: A Multi-Variable Controller for a Marine Propulsion System; Proc. IFAC Symp. Computer Aided Design of Control Systems, pp.593-602, Zurich (1979)
- 34) N.Munro, S.Engell: Regulator Design for the F100 Turbofan Engine; Preprints IEE International Conference on Control and Its Applications, pp.380-387, Warwick (1981)
- 35) 荒木： 周波数応答に基づく多変数フィードバック系の設計法； 第5回制御理論シンポジウム、pp. 33-38、八王子（昭. 51-5）
- 36) M.Terao: Quantization and Sampling Selection for Efficient DDC; Instr. Tech., Vol. 14, No. 8, pp.49-55 (1967)
- 37) A.H.Levis, R.A.Schlueter, M.Athans: On the Behaviour of Optimal Linear Sampled-Data Regulators; Int. J. Control, Vol. 13, No. 2, pp.343-361 (1971)
- 38) 毛利、山根、高田： サンプル値系の準最適制御—評価とサンプリング回数のトレード・オフ考慮—； 計測自動制御学会論文集、18巻、1号、pp. 1-7、（昭. 57-1）

- 39) 成田: デジタルシステム制御; 昭晃堂 (昭. 55)
- 40) T.A.S.Ibrahim, N.Munro: Design of Sampled-Data Multi-variable Control Systems Using the Inverse Nyquist Array; Int. J. Control, Vol. 22, No.3, pp.297-311 (1975)
- 41) D.Papaioannou, F.M.Hughes: Discrete Control Scheme Design for Multi-Input-Multi-Output Systems; IEE International Conference on Control and Its Applications, pp.28-32, Warwick (1981)
- 42) G.M.Kranc: Compensation of an Error-Sampled System by a Multirate Controller; Trans. AIEE, Vol.77, pp.149-159 (1957)
- 43) G.M.Kranc: Input-Output Analysis of Multirate Feedback System; IRE Trans. Automat. Contr., Vol.AC-3, pp.21-28 (1957)
- 44) R.E.Andeen: Staggered Sampling to Improve Stability of Multiple-Sampler Feedback Systems; Trans. AIEE, Vol.78, pp.399-403 (1958)
- 45) T.C.Coffy, I.J.Williams: Stability Analysis of Multiloop, Multirate Sampled Systems; AIAA J., Vol.4, pp.2178-2190 (1966)
- 46) E.I.Jury: "A note on multirate sampled-data systems"; IEEE Trans. Automat. Contr. (Corresp.), Vol.AC-12, pp.319-320 (1967)
- 47) W.H.Boykin, B.D.Frayer: Analysis of Multiloop, Multirate Sampled-Data Systems; AIAA J., Vol.13, pp.453-456 (1975)
- 48) W.H.Boykin, B.D.Frayer: Multirate Sampled-Data Systems Analysis via Vector Operators; IEEE Trans. Automat. Contr. (Short Paper), Vol.AC-20, pp.548-551 (1975)
- 49) D.C.Flowers, J.L.Hammond: Simplification of the Characteristic Equation of Multirate Sampled-Data Control Systems; IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC-17 (1972)
- 50) E.P.F.Kan, J.K.Aggarwal: Multirate Digital Filtering; IEEE Trans. Audio Electroacoust. (Corresp.), Vol.AU-20, pp.223-225 (1972)
- 51) T.S.Kuo, J.L.Yeh: A Note on Multirate  $z$  Transform; Proc. IEEE (Lett.), Vol.60, pp.226-227 (1972)
- 52) R.E.Kalman, J.E.Bertram: A Unified Approach to the Theory of Sampling Systems; J. Franklin Inst., Vol.267, pp.405-436 (1956)

- 53) B.Friedland: Sampled-data Control Systems Containing Periodically Varying Members; Proc. First IFAC Congress, pp.361-367 (1959)
- 54) R.A.Meyer, C.S.Burrus: A Unified Analysis of Multirate and Periodically Time-Varying Digital Filters; IEEE Trans., Vol.CAS-22, pp.162-168 (1975)
- 55) R.A.Meyer, C.S.Burrus: Design and Implementation of Multirate Digital Filters; IEEE Trans., Vol.ASSP-24, pp.53-58 (1976)
- 56) D.P.Stanford: Stability for a multirate sampled-data system; SIAM J. Control and Optimization, Vol.17, pp.390-399 (1979)
- 57) C.H.Lu, S.C.Gupta: "Multirate digital filters"; Int.J. Systems Sci., Vol.10, pp.605-620 (1979)
- 58) M.Araki: M-matrices ; Dep. Comput Contr., Imperial College, London, England, Publ. 74/19 (1974)
- 59) M.Fiedler, V.Ptak: On matrices with nonpositive off-diagonal elements and positive principal minors; Czech. Math. J., Vol.12, pp.382-400 (1962)
- 60) 荒木: M行列とその応用-I; システムと制御、20巻、12号、pp. 675-680 (昭. 51-12)
- 61) 佐川、黒崎、富塚: 船用再燃ボイラの蒸気温度制御; 川崎技報、40号、pp. 26-34 (昭. 46-1)
- 62) R.Bellman: Introduction to Matrix Analysis; McGraw Hill, p.96 (1960)
- 63) E.J.Davison: The Feedforward Control of Linear Multivariable Time-Invariant Systems; Automatica, Vol.9, pp.561-573 (1973)
- 64) E.J.Davison: Multivariable Tuning Regulators-The Feedforward and Robust Control of a General Servomechanism Problem; IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC-21, No.1 (1976)
- 65) 田嶋、安藤、近藤: 最適フィードバックを施した制御系に対するフィードフォワード要素の設計法; 計測自動制御学会論文集、17巻、2号、pp. 176-181 (昭. 56-3)
- 66) G.G.Leininger: New Dominance Characteristics for the Multivariable Nyquist Array Method; Int. J. Control, Vol.30, No.3, pp.459-475 (1979)
- 67) 矢野、荒木、近藤: 大型計算機のTSSを利用した制御系設計CADシステム; 第23回システムと制御研究発表講演会講演論文集、pp. 45-46 (昭. 54-5)

申請者発表の参考文献

- 101) K.Yamamoto, M.Araki, B.Kondo: On Frequency-Domain Techinques of Multivariable Design—Comparison via Example—; Systematization of Linear System Control Theory Aiming at Engineering Application (Edited by Ichikawa) pp.45-61 (1977)
- 102) M.Araki, K.Yamamoto, B.Kondo: GG-Pseudo-Band Method for the Design of Multivariable Control Systems; IFAC 8th Triennial World Congress, Vol.3, pp.137-142, Kyoto, (1981)
- 103) M.Araki, K.Yamamoto, B.Kondo: A CAD Method of Multivariable Control Systems Using Generalized Gershgori Bands; Mem. Fac. Engg., Kyoto Univ. Vol.45, No.1 pp.28-44 (1983)
- 104) 山本, 荒木, 近藤: 拡張ゲルシュゴリン帯のいくつかの性質; 第15回計測自動制御学会学術講演会予稿集, pp. 29-30 (昭. 51-8)
- 105) 荒木, 山本, 近藤: 近似非干渉化の度合の評価について—周波数応答に基づく多変数系の設計法に関連して—; 第16回計測自動制御学会学術講演会予稿集, pp. 285-286 (昭. 52-8)
- 106) 山本, 荒木, 近藤: 周波数応答に基づくフィードフォワード補償器の設計法; システムと制御, 24巻, 7号, pp 493-498 (昭. 55-7)
- 107) 山本, 荒木, 近藤: 周波数応答法によるボイラの制御—フィードフォワード補償について—; 第23回システムと制御研究発表講演会講演論文集, pp. 53-54 (昭. 54-5)
- 108) 荒木, 山本, 近藤: 周波数応答に基づく多変数系の設計(概論); 第19回自動制御連合講演会予稿集, pp 409-410 (昭. 51-11)
- 109) 山本, 荒木, 近藤: 周波数応答に基づく多変数系の設計(例題); 第19回自動制御連合講演会予稿集, pp. 411-412 (昭. 51-11)
- 110) 柴田, 山本, 荒木; ボイラの変数制御(1); 実例に基づく多変数制御に関する研究発表資料(計測自動制御学会関西支部主催), pp. 119-131, 大阪 (昭. 53-12)
- 111) 山本, 荒木: 多変数多周期サンプリング値制御系の安定条件と一般化ゲルシュゴリン帯; 第12回制御理論シンポジウム資料, pp. 153-158, (昭. 58-5)
- 112) M.Araki, K.Yamamoto: Multivariable Multirate Sampled-Data Systems—Symmetric Cordinate Expression, Generalized Gershgori Bands, and Stability—; 日米セミナー「代数的システム理論の最近の発展」、講演論文、Gainesville Florida (1983)
- 113) 山本, 荒木, 近藤: 多変数多周期サンプリング値制御系の安定条件; 第27回システムと制御研究発表講演会講演論文集, pp. 259-260, (昭. 58-5)

- 114) 山本, 荒木: 異なるサンプリング周期をもつ多変数系の周波数領域における一表現; 第25回システムと制御研究発表講演会講演論文集, pp. 183-184, (昭. 56-5)
- 115) 荒木, 山本: 異なるサンプリング周期をもつ多変数系の一般化ゲルシュゴリン帯 第25回システムと制御研究発表講演会講演論文集, pp. 185-186, (昭. 56-5)
- 116) 山本, 荒木, 近藤: サンプル値系におけるデカップリング問題; 第21回自動制御連合講演会予稿集, pp. 57-58 (昭. 53-11)
- 117) M.Araki, K.Yamamoto: Decoupling of Sampled-Data Systems, Two-Input Two-Output Case; Int.J.Control, Vol.35, No.3, pp.417-425 (1982)